PAULO BOULOS
IVAN DE CAMARGO

GEOMETRIA ANALÍTICA

um tratamento vetorial

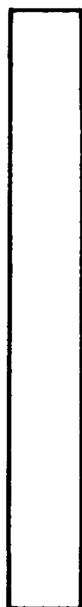
MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.
São Paulo
Rua Tabapuã, 1348 Itaim Bibi
CEP 04533-004
(011) 829-8604 e (011) 820-6622

Rio de Janeiro · Lisboa · Porto · Bogotá · Buenos Aires · Guatemala · Madrid · México · New York · Panamá · San Juan · Santiago

Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

SUMÁRIO

PARTE 2 - GEOMETRIA ANALÍTICA



PARTE I

VETORES

INTRODUÇÃO

Nesta 1ª parte, apresentamos os Vetores, que constituem uma importante ferramenta para o estudo da Geometria Analítica, da Física, do Cálculo etc. Você encontrará aqui respostas às perguntas: "O que é?", "Como funciona?" e "Para que serve?". O nosso ambiente será o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, isto é, o conjunto dos pontos da Geometria Euclidiana. Esse conjunto será indicado por E^3, e muitas vezes citado simplesmente como o "espaço". Você deve sempre imaginar, como modelo intuitivo de E^3, o espaço físico que nos cerca.

Os pontos de E^3 serão indicados por letras latinas maiúsculas (A, B, P, Q etc.); as retas, por letras latinas minúsculas (r, s, t etc.) e os planos por letras gregas minúsculas (π, α, β etc.).

Se uma reta r contém os pontos P e Q, falaremos em "reta PQ"; o segmento geométrico de extremidades P e Q será indicado por PQ. Quando um plano contém os pontos P, Q e R (não colineares), falaremos em "plano PQR".

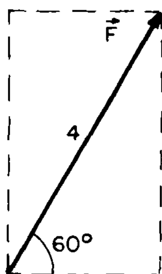
Serão pressupostos os resultados da Geometria Euclidiana, alguns dos quais serão utilizados livremente.

CAPÍTULO 1

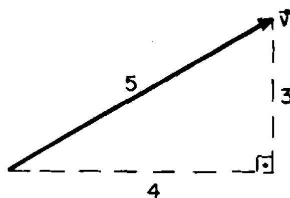
VETORES

Noção Intuitiva

Existem grandezas, chamadas escalares, que são caracterizadas por um número (e a unidade correspondente): $50\ dm^2$ de área, 4 m de comprimento, 7 kg de massa. Outras, no entanto, requerem mais do que isso. Por exemplo, para caracterizarmos uma força ou uma velocidade, precisamos dar a direção, a intensidade (ou módulo) e o sentido:

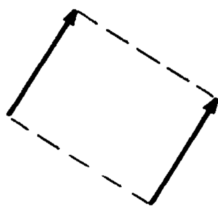


Uma força de 4 N



Uma velocidade de 5 m/s

Tais grandezas são chamadas vetoriais. Nos exemplos acima as flechas nos dão idéia exata das grandezas mencionadas. No entanto, vamos adotar o seguinte ponto de vista: duas flechas de mesmo comprimento, mesma direção, (isto é, paralelas) e mesmo sentido (veja a figura adiante) definem a *mesma* grandeza vetorial. Tais flechas são ditas equipolentes.



Um caso da prática que corresponde a esse ponto de vista é o de um sólido em translação. Nesse caso, a grandeza velocidade de cada ponto, em cada instante, é a mesma. Então, qual das flechas (equipolentes) que dão a velocidade dos pontos do sólido seria escolhida como sendo a *velocidade do sólido* num certo instante? Como nenhuma tem preferência, que tal escolher *todas*, ou melhor, o conjunto de todas elas para ser chamado velocidade do sólido? Aqui está o germe da noção de vetor. Nesse caso, tal conjunto seria o *vetor velocidade* do sólido, no instante considerado.

Formalização do conceito de vetor

Primeiramente, a definição de flecha. Flecha é, intuitivamente, um segmento no qual se fixou uma orientação. E fixar uma orientação é escolher um sentido. No caso da figura, o segmento orientado representado tem orientação de A para B. Na verdade não precisamos da flecha toda para os nossos objetivos. Bastam os pontos A e B, e a ordem: primeiro A e depois B. Eis a definição:



Definição 1

Um *segmento orientado* é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço. A é dito *origem*, B *extremidade* do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são ditos nulos. Observe que se $A \neq B$, (A, B) é diferente de (B, A).

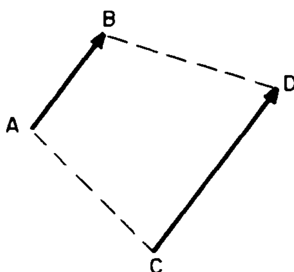
Definição 2

- Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos AB e CD têm o mesmo comprimento.

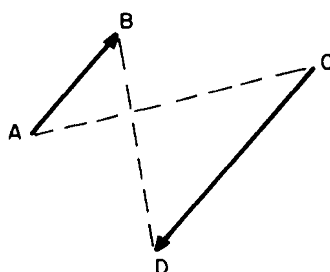
- Suponha (A, B) e (C, D) não nulos. Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesma direção se $AB \parallel CD$(*). Nesse caso dizemos que (A, B) e (C, D) são paralelos.

- Suponha que (A, B) e (C, D) têm mesma direção.

  a) Se as retas AB e CD são distintas, dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido caso os *segmentos* AC e BD tenham interseção vazia. Caso $AB \cap CD \neq \phi$, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.



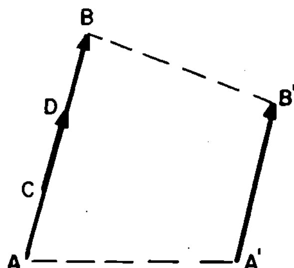
mesmo sentido



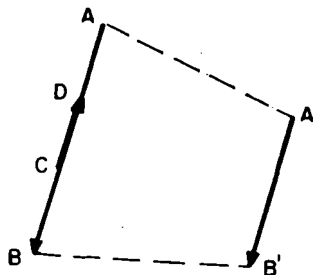
sentido contrário

(*) AB // CD inclui o caso em que as retas suportes coincidem.

b) Se as retas AB e CD coincidem, tome (A′, B′) tal que A′ não pertença à reta AB e (A′, B′) tenha mesma direção, e mesmo sentido que (A, B) (como em a)). Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido se (A′, B′) e (C, D) têm mesmo sentido. Se não, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.



mesmo sentido



sentido contrário

Verifique que (A, B) e (B, A) têm mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário, sendo $A \neq B$.

Definição 3

Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são *equipolentes*, e indica-se (A, B) ~ (C, D), se um dos casos seguintes ocorrer:

a) ambos são nulos;

b) nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Decorre da definição que "equipolente a um segmento nulo, só outro segmento nulo".

Proposição 1: A relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

a) (A, B) ~ (A, B) (reflexiva)

b) (A, B) ~ (C, D) $\Rightarrow$ (C, D) ~ (A, B) (simétrica)

c) (A, B) ~ (C, D) e (C, D) ~ (E, F) $\Rightarrow$ (A, B) ~ (E, F) (transitiva)(*)

Omitimos a demonstração. No entanto, será bom que você se convença da validade das asserções.

Considere agora um segmento orientado (A, B) fixado. Chama-se classe de equipolência de (A, B) ao conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B) (e portanto equipolentes entre si, pela propriedade transitiva). O próprio (A, B) é um deles, pela propriedade reflexiva. (A, B) se diz um *representante* da classe. Note que se (C, D) pertence à classe de equipolência de (A, B) então (A, B) pertence à classe de equipolência de (C, D) (devido à propriedade simétrica)

(*) Uma relação que goza das propriedades a), b) e c) se chama *relação de equivalência*.

e na verdade essas duas classes coincidem, pois quem for equipolente a (C, D) o será a (A, B) e vice-versa (propriedade transitiva). Em outras palavras, qualquer segmento orientado pertencente a uma classe de equipolência pode ser considerado seu representante, e cada segmento orientado é representante de uma única classe de equipolência.

Definição 4

• Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados de E^3. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor correspondente (ou seja, o vetor cujo representante é (A, B)) será indicado por $\overrightarrow{AB}$. Usam-se também letras latinas minúsculas encimadas por uma seta ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ etc.), não se fazendo desse modo referência ao representante. É claro que para citarmos um vetor basta citar (ou desenhar) um qualquer de seus representantes, e pronto: o vetor estará bem determinado. O conjunto de todos os vetores será indicado por V^3.

• Chamaremos *vetor nulo* ao vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Já comentamos que equipolente a um segmento nulo, só outro segmento nulo; segue-se que *todos* os representantes do vetor nulo são segmentos com origem e extremidade coincidentes. Indica-se o vetor nulo por $\vec{0}$.

• Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ não-nulos são *paralelos* (indica-se $\vec{x} \,//\, \vec{y}$) se um representante de $\vec{x}$ é paralelo a um representante de $\vec{y}$ (e portanto a todos). Se $\vec{x} \,//\, \vec{y}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ *têm mesmo sentido* (resp. *sentido contrário*) se um representante de $\vec{x}$ e um representante de $\vec{y}$ têm mesmo sentido (resp. sentido contrário). Consideraremos o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

• Chamaremos *norma* (ou *módulo*, ou *comprimento*) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de $\vec{x}$ por $\|\vec{x}\|$. Se $\|\vec{x}\| = 1$, dizemos que o vetor $\vec{x}$ é unitário.

Observação

De um modo geral, conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo, comprimento, ângulos etc., envolvendo vetores, são definidos "pondo-se a culpa nos representantes", como foi feito acima. Veja por exemplo a Definição 2 do Capítulo 6.

• O vetor $\overrightarrow{BA}$ é chamado *vetor oposto* do vetor $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ só diferem no sentido (se $A \neq B$), já que seus representantes (A, B) e (B, A) têm mesma direção, mesmo comprimento e sentido contrário. O vetor oposto do vetor $\overrightarrow{AB}$ é indicado também por $-\overrightarrow{AB}$; o vetor oposto de um vetor $\vec{x}$ é indicado por $-\vec{x}$.

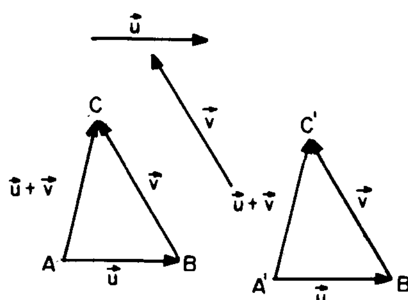
Um fato que estaremos usando sempre é que você poderá intuir facilmente é o seguinte: dados um ponto A e um vetor $\vec{v}$, existe um único segmento orientado representante de $\vec{v}$ com origem A (tente provar isso).

Finalizamos este parágrafo com uma recomendação: nunca use o termo "vetores equipolentes", já que a equipolência é uma relação entre segmentos orientados e não entre vetores. Se os *segmentos orientados* (A, B) e (C, D) são *equipolentes*, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são *iguais* (isto é, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) pertencem à mesma classe de equipolência).

CAPÍTULO 2

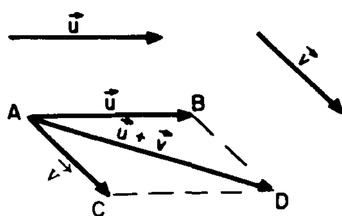
ADIÇÃO DE VETORES

Vamos definir em V^3 uma operação de adição, que a cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fará corresponder o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Para isso, procedemos do seguinte modo: consideramos um representante qualquer (A, B) do vetor $\vec{u}$ e o representante do vetor $\vec{v}$ que tem origem B. Seja C a extremidade deste último. Fica assim determinado o segmento orientado (A, C). Por definição, o vetor $\overrightarrow{AC}$, cujo representante é o segmento orientado (A, C), é o vetor soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.



Observações

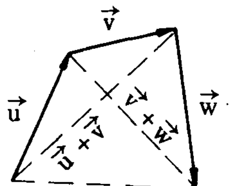
1. A definição nos diz que para determinar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, basta "fechar o triângulo", tomando o cuidado de escolher a origem do segundo coincidindo com a extremidade do primeiro (representante). Pode-se também adotar a "regra do paralelogramo", que consiste em tomar representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem A ((A, B) e (A, C) na figura



ao lado) e construir o paralelogramo ABCD. O segmento orientado (A, D) (diagonal que contém o ponto A) é um representante do vetor $\vec{u}+\vec{v}$, já que ela "fecha o triângulo" ABD e $\overrightarrow{BD}=\vec{v}$.

2. A escolha do representante (A, B) do vetor $\vec{u}$ é arbitrária, mas isso não influi na determinação de $\vec{u}+\vec{v}$. De fato, se escolhermos outro representante (A', B') para $\vec{u}$ e conseqüentemente outro representante (B', C') para $\vec{v}$ teremos $(A', B') \sim (A, B)$, $(B', C') \sim (B, C)$ e daí segue que $(A', C') \sim (A, C)$ (convença-se disso; por exemplo, na situação ilustrada na penúltima figura, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes – por quê?)

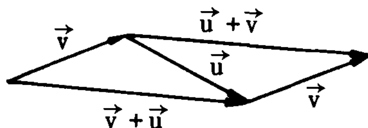
São muito importantes as propriedades que enunciamos a seguir; elas constituem as primeiras "regras" do cálculo com vetores. Não faremos demonstrações, mas as figuras seguintes são elucidativas.



A1) PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}), \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$

A2) PROPRIEDADE COMUTATIVA



$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V^3$

A3) ELEMENTO NEUTRO

$\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}, \quad \forall\ \vec{u} \in V^3$

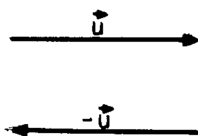
(lembre-se que todo representante do vetor nulo tem origem e extremidade coincidentes). Assim,

$\vec{u}+\vec{0} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$

A4) ELEMENTO OPOSTO

Dado um vetor $\vec{u}$ qualquer, existe um vetor que somado a $\vec{u}$ dá como resultado o vetor nulo: trata-se do vetor oposto de $\vec{u}$, que se indica por $-\vec{u}$.

$\vec{u}+(-\vec{u}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

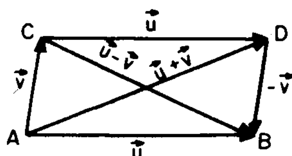


Esta propriedade nos permite definir subtração de vetores: $\vec{u} - \vec{v}$ é por definição a soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor oposto do vetor $\vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V^3$$

Observação

Escolhidos os representantes (A, B) e (A, C) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e construído o paralelogramo ABCD (figura) o vetor $\vec{u} - \vec{v}$ terá como representante o segmento orientado (C, B), pois $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$, $\overrightarrow{DB} = -\vec{v}$, e $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$. Assim, as diagonais do paralelogramo representam a soma e a diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Exercício resolvido

Prove as "leis do cancelamento" da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

$$\vec{x} + \vec{z} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

Resolução

Provaremos a primeira; a segunda se reduz à primeira devido à propriedade comutativa A2.

Somando aos dois membros da igualdade $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ o vetor oposto do vetor $\vec{u}$, obtemos:

$$(-\vec{u}) + (\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{u}) + (\vec{u} + \vec{w});$$

pela associativa (A1) temos

$$(-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w};$$

pela propriedade A4 resulta

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w}$$

ou, pela comutativa,

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{w} + \vec{0};$$

e, finalmente, pela propriedade A3,

$$\vec{v} = \vec{w}.$$

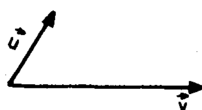
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

2. Dados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura, ache um representante de $\vec{x}$ tal que

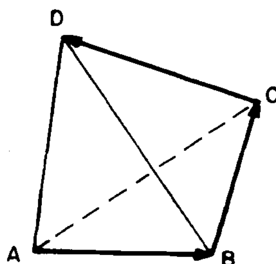
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$$



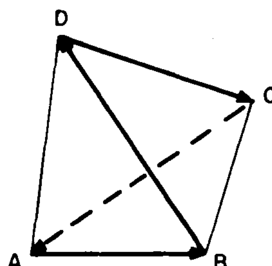
3. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, tome um representante (A, B) de $\vec{u}$, um representante (B, C) de $\vec{v}$, um representante (C, D) de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante (A, D). (Intuitivamente falando, "fecha-se o polígono".) Raciocinando por indução finita, pode-se generalizar essa regra para *n* parcelas.

4. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:

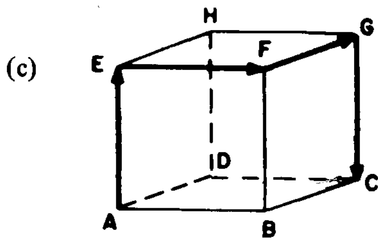
(a)



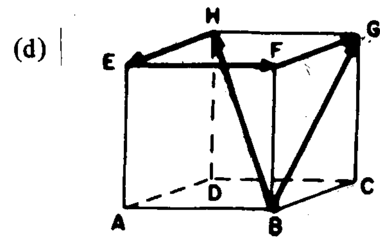
(b)



(c)

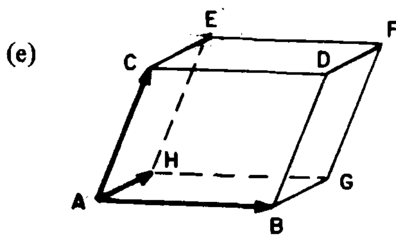


(d)



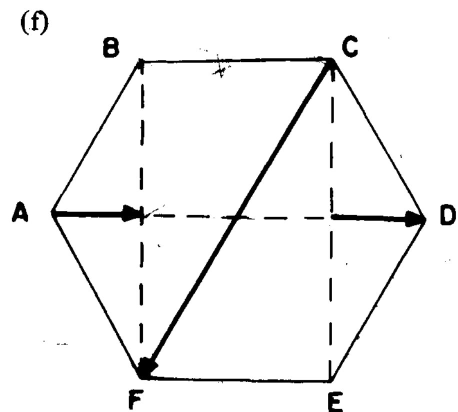
(CUBOS)

(e)



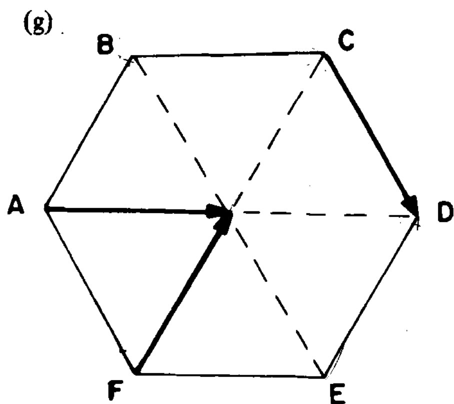
(PARALELEPÍPEDO)

(f)

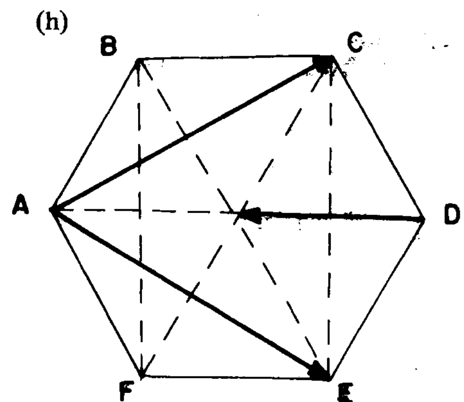


(HEXÁGONOS REGULARES)

(g)



(h)

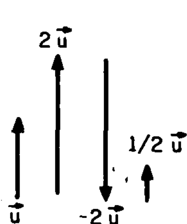


CAPÍTULO 3

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO REAL POR VETOR

Vamos definir uma operação "externa" em V^3, que a cada número real α e a cada vetor $\vec{v}$ associa um vetor indicado por $\alpha\vec{v}$ tal que:

- Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ (por definição)
- Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha\vec{v}$ é caracterizado por



a) $\alpha\vec{v} \, // \, \vec{v}$

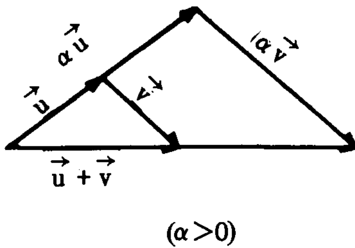
b) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$.

c) $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$.

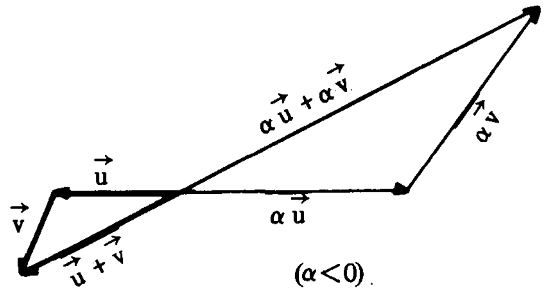
Vejamos quais são as propriedades da multiplicação de número por vetor; aqui, como nas propriedades da adição, omitiremos as demonstrações (isso não o isenta da obrigação de entender e intuir as propriedades; faça figuras!).

M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3$

(observe a semelhança dos triângulos da figura seguinte).



(α>0)



(α<0)

M2) $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v}+\beta\vec{v}, \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{v} \in V^3$

M3) $1.\vec{v} = \vec{v}, \quad \forall\, \vec{v} \in V^3$

M4) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} = \beta(\alpha\vec{v}), \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{v} \in V^3$

Observações

1. As quatro propriedades da adição e as quatro propriedades da multiplicação de número por vetor conferem a V^3 o que se chama uma estrutura de "espaço vetorial". O nome "espaço vetorial" se inspira, naturalmente, nos vetores, e pode ser entendido como "espaço cujo comportamento algébrico é idêntico ao do espaço V^3", ou seja, espaço onde valem as propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4. Os espaços vetoriais são estudados na Álgebra Linear.

2. É comum usar-se o termo *escalar* para designar *número real*, em contraposição a *vetor*. A operação definida neste parágrafo é, pois, a *multiplicação de vetor por escalar* (não confunda com *produto escalar*, que será definido mais adiante).

3. Como as oito propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4 são válidas também para a adição e pàra a multiplicação de números reais, o cálculo com vetores (pelo menos no que tange às duas operações definidas até agora) segue os mesmos princípios – as mesmas regras – que o cálculo algébrico elementar. Por exemplo, somando aos dois membros da igualdade $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ o vetor oposto do vetor $\vec{a}$, e aplicando as propriedades A1, A4, A2, e A3, chegamos a

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

Logo, vale para os vetores a conhecida regra "pode-se transpor um termo de um membro para outro de uma igualdade, desde que se lhe troque o sinal".

4. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in V^3$, com $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\vec{v}}{\alpha}$ significa $\dfrac{1}{\alpha}\vec{v}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Prove as Regras de Sinais:

a) $(-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v})$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{v} \in V^3$

b) $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{v} \in V^3$

c) $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{v} \in V^3$

Resolução

a) Devemos provar que $(-\alpha)\vec{v}$ é o vetor oposto do vetor $\alpha\vec{v}$; para isso, pela definição de vetor oposto, é suficiente mostrar que a soma $(-\alpha)\vec{v} + \alpha\vec{v}$ é o vetor nulo. Vejamos:

$$(-\alpha)\vec{v} + \alpha\vec{v} \overset{M2}{=} (-\alpha+\alpha)\vec{v} = 0\vec{v} \overset{def.}{=} \vec{0}$$ como queríamos.

b) Devemos mostrar que $\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \vec{0}$ para concluir que $\alpha(-\vec{v})$ é o oposto de $\alpha\vec{v}$. Mas:

$$\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} \overset{M1}{=} \alpha(-\vec{v}+\vec{v}) = \alpha\vec{0} \overset{def.}{=} \vec{0}$$

c) Usaremos as partes a) e b):

$$(-\alpha)(-\vec{v}) \overset{a)}{=} -[\alpha(-\vec{v})] \overset{b)}{=} -[-(\alpha\vec{v})] = \alpha\vec{v}$$

(explique você mesmo a última passagem; lembre-se da definição de vetor oposto).

2. Prove que se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$ e se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\alpha = \beta$.

Resolução

$$\alpha\vec{v} = \beta\vec{v} \Rightarrow \alpha\vec{v} - \beta\vec{v} = \vec{0} \overset{def.}{\Rightarrow} \alpha\vec{v} + (-(\beta\vec{v})) = \vec{0}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \alpha\vec{v} + (-\beta)\vec{v} = \vec{0} \overset{M2}{\Rightarrow} (\alpha-\beta)\vec{v} = \vec{0}$$

Como por hipótese $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos (exercício 1 adiante) que $\alpha - \beta = 0$ ou seja $\alpha = \beta$.

(*) Exercício Resolvido 1a).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que $\alpha \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

2. Prove que se $\alpha \vec{u} = \alpha \vec{v}$ e se $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Prove que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

4. Prove que $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$.

5. Se (A, B) é um representante de $\vec{u} \neq \vec{0}$, e (C, D) um representante de $\vec{v} \neq \vec{0}$, prove que:

   AB // CD $\Longleftrightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

   (Este resultado é importantíssimo e será muito útil; trata-se de uma "tradução" algébrica muito simples, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, de um fato geométrico muito importante, o paralelismo. É exatamente isto que se pretende na Geometria Analítica.)

6. Resolva a equação na incógnita $\vec{x}$: $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$

7. Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

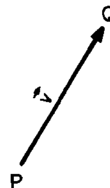
8. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário (chamado *versor* de $\vec{v}$).

CAPÍTULO 4

SOMA DE PONTO COM VETOR

Como já comentamos no final do Capítulo 1, dados um ponto P e um vetor $\vec{v}$, existe um único segmento orientado (P, Q) representante de $\vec{v}$. Isso nos permite definir uma operação que a cada ponto $P \in E^3$ e a cada vetor $\vec{v} \in V^3$ associa um único ponto Q de E^3, indicado por $P + \vec{v}$, e chamado *soma* de P com $\vec{v}$. Assim,

$$\forall\ P \in E^3,\ \forall \vec{v} \in V^3 : P + \vec{v} = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{v} \qquad (1)$$



donde $\quad P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Usaremos a notação $P - \vec{v}$ para indicar a soma do ponto P com o vetor oposto do vetor $\vec{v}$:

$$P - \vec{v} = P + (-\vec{v})$$

Intuitivamente, podemos encarar $P + \vec{v}$ como o resultado de uma translação do ponto P, translação essa determinada pelo vetor $\vec{v}$.

Vejamos algumas propriedades dessa operação:

P1. $P + \vec{0} = P \quad \forall P \in E^3$

É uma conseqüência imediata da definição, pois $\overrightarrow{PP} = \vec{0} \Rightarrow P + \vec{0} = P$.

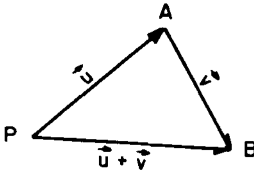
P2. $P + \vec{u} = P + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

De fato: seja $Q = P + \vec{u} = P + \vec{v}$. Então, da definição decorre que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$. Logo $\vec{u} = \vec{v}$. Note que esta propriedade permite um "cancelamento" de P na igualdade $P + \vec{u} = P + \vec{v}$.

P3. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3 \quad \forall P \in E^3$

Demonstração

Sejam (veja a figura ao lado) $A = P + \vec{u}$ e $B = A + \vec{v}$ (logo, $B = (P + \vec{u}) + \vec{v}$). Então, da definição decorre que $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Somando, temos $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ e como $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$, vem $\overrightarrow{PB} = \vec{u} + \vec{v}$. Novamente pela definição de soma de ponto com vetor, concluímos que $B = P + (\vec{u} + \vec{v})$ e que portanto $(P+\vec{u})+\vec{v}=P+(\vec{u}+\vec{v})$.



P4. $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$

(Agora se trata de um "cancelamento" de $\vec{v}$). De fato, $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow (A + \vec{v}) - \vec{v} = (B + \vec{v}) - \vec{v} \overset{P3}{\Rightarrow} A + (\vec{v} - \vec{v}) = B + (\vec{v} - \vec{v}) \Rightarrow A + \vec{0} = B + \vec{0} \overset{P1}{\Rightarrow} A = B$.

P5. $(P - \vec{v}) + \vec{v} = P$

Decorre diretamente de P3 e de P1:

$$(P - \vec{v}) + \vec{v} = [P + (-\vec{v})] + \vec{v} \overset{P3}{=} P + [-\vec{v} + \vec{v}] = P + \vec{0} \overset{P1}{=} P$$

Observação

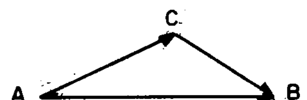
Se o segmento orientado (A, B) é um representante do vetor $\vec{x}$, é usual representar esse vetor por $\overrightarrow{AB}$, ou também por $B - A$. Esta última é chamada notação de Grassmann (não se trata, a rigor, de subtrair pontos, mas sim de uma notação sugestiva: já que o ponto B é a soma do ponto A com o vetor $\vec{x}$ (pois $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$), o vetor $\vec{x}$ seria a "diferença" entre B e A).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

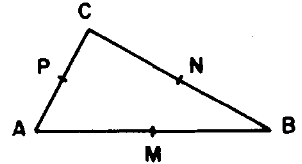
Resolução

Lembrando que por definição de adição de vetores $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ e que $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ obtemos o resultado



2. Na figura, M, N, P são pontos médios de AB, BC e CA respectivamente. Exprima $\vec{BP}$. $\vec{AN}$. $\vec{CM}$ em função de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

Resolução



- $\vec{BP} = \vec{AP} + \vec{BA}$

Precisamos fazer aparecer $\vec{AC}$. Aí usamos o fato de P ser ponto médio:

$$2\vec{AP} = \vec{AC}$$

Então, levando na primeira relação acima, vem:

$$\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB} \qquad (\alpha)$$

- Quanto a $\vec{AN}$:

$$\vec{AN} = \vec{BN} + \vec{AB}$$

$$2\vec{BN} = \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BA}$$

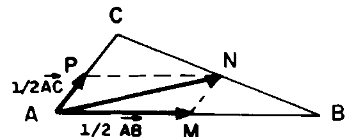
$$\therefore\ \vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BA}) + \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AB}$$

$$\therefore\ \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB} \qquad (\beta)$$

- Fica a seu cargo provar que

$$\vec{CM} = -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB} \qquad (\gamma)$$

Na figura ao lado, damos uma ilustração de (β). Faça você uma de (α) e uma de (γ).



Observações

(a) Eis um outro modo de resolver o problema:

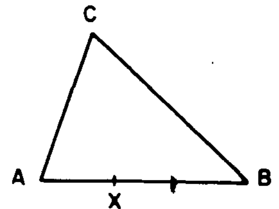
Parta de $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e faça aparecer B: $2(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$

Daí $2\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \therefore \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

(b) Não vá concluir de (β) que a medida de AN é a semi-soma das medidas de AB e AC! Sendo A, B, C vértices de um triângulo, vale $\|\overrightarrow{AN}\| < \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|$ (por quê?)

(c) Verifique que (α), (β) e (γ) valem, mesmo que A, B e C sejam colineares.

3. Na figura, a medida de AX é metade da medida de XB. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



Resolução

Podemos escrever $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XB}$ (Cuidado: $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{XB}$ têm o mesmo sentido! É comum enganar-se escrevendo por exemplo $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BX}$, o que está errado, pois os vetores do 1º e 2º membros têm sentido contrário.) Fazendo "aparecer" C resulta:

$$\overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CX})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CX}$$

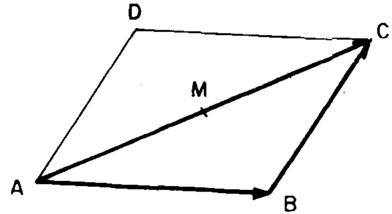
$$\therefore \quad \overrightarrow{CX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{CX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

4. Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Resolução

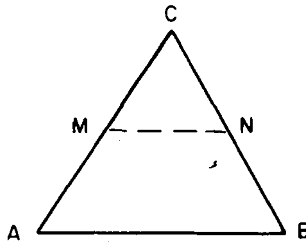


Considere o paralelogramo ABCD, de diagonais AC e DB. Seja M o ponto médio de AC. Vamos provar que M é também ponto médio de BD. Ora, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD}$. Logo, M é ponto médio de BD.

5. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste lado.

Resolução

Seja o triângulo ABC, e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente.



A afirmação feita equivale à seguinte relação: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (por quê?) a qual passaremos a provar.

Podemos escrever
$$2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB}$$

Somando membro a membro, resulta $2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

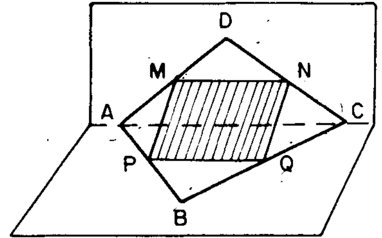
$$\therefore\ 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

6. Prove que se os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um segundo quadrilátero, este é um paralelogramo.

Resolução

Seja ABCD o quadrilátero, e, M, N, P, Q os quatro pontos médios de seus lados. Para provarmos a asserção, basta provarmos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ (pois se um quadrilátero tem dois lados opostos paralelos e congruentes, ele é um paralelogramo).



Pelo exercício anterior, considerando o Δ ADC, podemos escrever $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Do mesmo modo, considerando o Δ ACB, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Dessas duas expressões resulta $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, como queríamos.

7. Prove que num triângulo as retas suportes de duas medianas se encontram num único ponto.

Resolução

Com a notação do Exercício Resolvido 2, vamos provar a afirmação provando que $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{BP}$ não são paralelos. Se fossem, haveria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{BP} = \lambda\ \overrightarrow{AN}$.

Usando as expressões (α) e (β) do Exercício Resolvido nº 2 vem

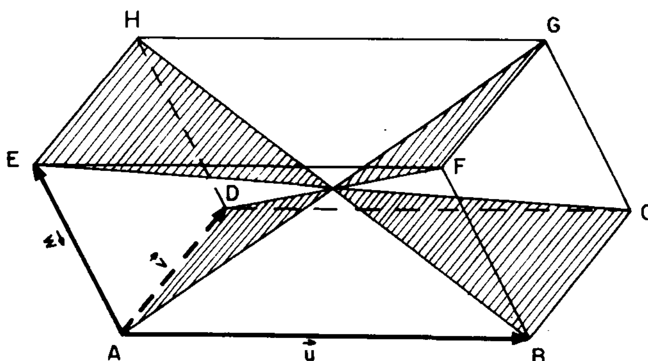
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}$$

donde

$$\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC} = (1 + \frac{\lambda}{2})\overrightarrow{AB}$$

Não pode suceder $\lambda = 1$, senão seria $(1 + \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, logo B = A. Então $\lambda \neq 1$, e daí $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1 + \frac{\lambda}{2}}{\frac{1-\lambda}{2}}\overrightarrow{AB}$; logo $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ seriam paralelos, o que é absurdo.

4 Na figura se representa um paralelepípedo ABCDEFGH. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.



Resolução

- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$

$\therefore \ \overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

(interpretação: em termos vetoriais, "a diagonal de um paralelepípedo é a soma de suas arestas").

- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} = \vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$

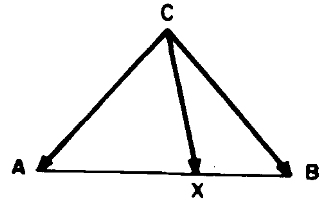
- $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HD} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

Da mesma forma chega-se a

- $\overrightarrow{DF} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m).



Sugestão. Na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ faça aparecer C em ambos os membros.

2. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{AY}, \overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m, n, p).

3. Num triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $\|\overrightarrow{AX}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam.

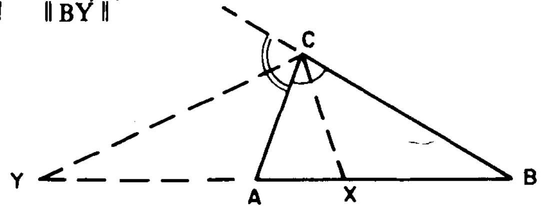
Sugestão: Use o exercício anterior, achando qual deve ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.

4. Num triângulo ABC, sejam X a interseção do lado AB com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$, e, supondo $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$, Y a interseção da reta AB com uma das bissetrizes externas do ângulo $A\hat{C}B$(*).

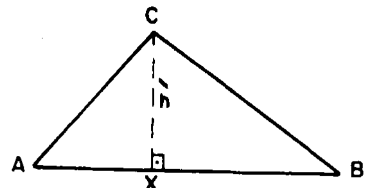
a) Os vetores $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ e $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ são respectivamente paralelos a $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$. Dê uma explicação geométrica para isso. No Capítulo 8 (Exercício 3) você dará uma prova analítica.

b) Prove que $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}$ e $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AY}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BY}\|}$.

c) Exprima $\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CY}$, X e Y em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



5. Sendo CX a altura do ΔABC relativa ao vértice C, exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
Sugestão. Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são retos, vale $h = \|\overrightarrow{AX}\| \operatorname{tg}\hat{A} = \|\overrightarrow{BX}\| \operatorname{tg}\hat{B}$. Conclua daí que $(\operatorname{tg}\hat{A})\,\overrightarrow{AX} = (\operatorname{tg}\hat{B})\,\overrightarrow{XB}$, quer $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam agudos, quer um deles seja obtuso.



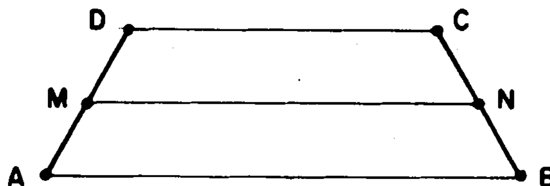
(*) Existe Y se $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$.

6. Prove que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, que divide cada uma na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.

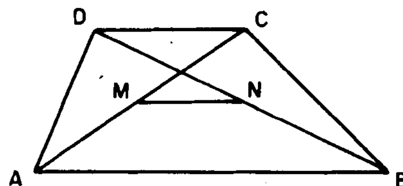
Sugestão: Usando o Exercício Resolvido nº 7: seja G o ponto comum às retas AN e BP, e H o ponto comum às retas AN e CM. Existem λ, μ, α e β tais que $G = A + \lambda \overrightarrow{AN} = B + \mu \overrightarrow{BP}$ e $H = C + \alpha \overrightarrow{CM} = A + \beta \overrightarrow{AN}$. Calcule λ, μ, α e β.

7. Prove que as alturas de um triângulo se encontram num mesmo ponto. Idem para as bissetrizes internas.

8. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



10. Num triângulo ABC, sejam M, N, P, os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Sugestão: Exercício Resolvido nº 2.

11. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

Sugestão: Tome um ponto O qualquer e considere os pontos $X = O + \overrightarrow{AN}$, $Y = X + \overrightarrow{BP}$ e $Z = Y + \overrightarrow{CM}$. Mostre que $Z = O$ e que O, X, Y não são colineares.

12. Sendo ABCDEF um hexágono regular de centro O, prove que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\,\overrightarrow{AO}.$$

13. Seja OABC um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

14. Seja OABC um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

15. Sejam A, B, C, D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

16. Seja ABCD um quadrilátero, e O um ponto qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

17. Dados O, A, B, C, ache G tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ em função de O, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

18. Sejam A, B e C três pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

X é um ponto da reta AB $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha + \beta = 1$.

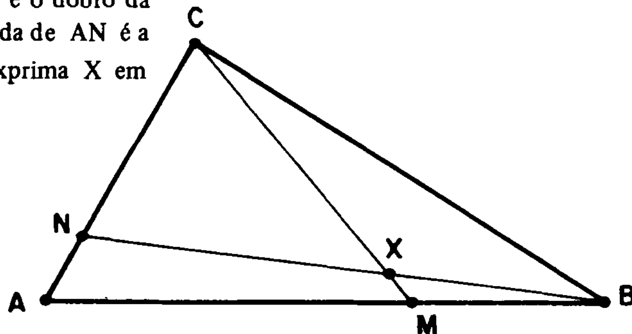
Sugestão: Exercício 1.

19. Nas condições do Exercício 18, prove que:

X é um ponto do segmento AB $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, e $\alpha + \beta = 1$.

20. Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Prove que: X é um ponto interior ao triângulo ABC se e somente se $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $\alpha + \beta < 1$ (um ponto é interior a um triângulo se for interior a alguma ceviana dele).

21. Na figura, a distância de M a A é o dobro da distância de M a B, e a medida de AN é a terça parte da medida de CN. Exprima X em função de A, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



22. Considere o triângulo ABC, e sejam $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$, e $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$. Calcule α real para que o ponto $X = C + \alpha \vec{w}$ pertença à reta AB.

CAPÍTULO 5

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Um conceito fundamental para tudo o que virá a seguir é o de dependência linear de vetores. Veremos em primeiro lugar a conceituação geométrica, para em seguida caracterizá-la algebricamente.

Inicialmente, fixemos a seguinte linguagem: um vetor $\vec{u}$ diz-se paralelo a uma reta r (a um plano π) se existir um representante (A, B) de $\vec{u}$ tal que o segmento AB esteja contido em r (em π). Em particular, o vetor nulo é paralelo a qualquer reta e a qualquer plano. É claro que dois vetores paralelos a uma mesma reta são paralelos; mas cuidado: dois vetores paralelos a um mesmo plano podem não ser paralelos!

A conceituação geométrica da dependência linear será feita por etapas, conforme a quantidade de vetores envolvidos.

Definição 1

I – Uma seqüência $(\vec{v})$ de um único vetor $\vec{v} \in V^3$ é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{v} = \vec{0}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, a seqüência $(\vec{v})$ é *linearmente independente* (LI).

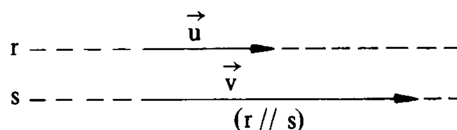
II – Uma seqüência $(\vec{u}, \vec{v})$ de vetores de V^3 é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a uma mesma reta. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v})$ é *linearmente independente* (LI).

III – Uma seqüência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vetores de V^3 é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forem paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é *linearmente independente* (LI).

IV – Qualquer seqüência de vetores com quatro ou mais elementos é *linearmente dependente* (LD) por definição.

Observações

1. Conforme ficou bem explícito na definição, dependência e independência linear são qualidades inerentes a *seqüência* de vetores, e não aos próprios vetores. Apesar disso, é comum dizer-se: "os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI", ou "os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD". É claro que o significado é: "o par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI", ou, respectivamente, "a tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD". Evite, portanto, o seguinte erro de raciocínio: se o vetor $\vec{u}$ é LI e o vetor $\vec{v}$ é LI, então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI. Isso nem sempre é verdade, como por exemplo no caso da figura, onde $(\vec{u})$ é LI, pois $\vec{u} \neq \vec{0}$, $(\vec{v})$ é LI, pois $\vec{v} \neq \vec{0}$, mas $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD (por quê?)



2. Se uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n)$ é LD [LI], qualquer permutação dessa seqüência também é LD [LI].

3. Se um dos vetores da seqüência é nulo, essa seqüência é LD. Verifique você mesmo.

CARACTERIZAÇÃO ALGÉBRICA DA DEPENDÊNCIA E DA INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição 2

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ vetores de V^3 $(n \geqslant 1)$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ números reais. Chama-se *combinação linear* dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ (com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$) ao vetor

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Se $\vec{u}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$, diz-se também que $\vec{u}$ é *gerado* pelos vetores $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$.

Observe agora que o vetor nulo é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$, quaisquer que sejam estes vetores. De fato, sempre é possível escolher $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, e teremos

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n \qquad (1)$$

Ora, dirá você, assim não tem graça! É claro que escolhendo todos os coeficientes iguais a zero, a combinação linear resultará no vetor nulo! Concordo. Será que haveria, porém, outra combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ (isto é, em que os coeficientes NÃO sejam todos nulos) que seja também igual a $\vec{0}$? Conforme veremos mais adiante (Proposição 2), isso depende exclusivamente de ser LI ou LD a seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$.

Antes, veremos uma primeira relação entre dependência linear e combinações lineares.

Proposição 1

Uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ $(n \geqslant 2)$ é LD se e somente se algum vetor da seqüência for gerado pelos demais.

Demonstração

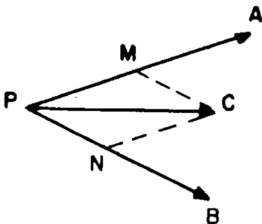
Analisaremos separadamente cada um dos casos (II), (III) e (IV) da Definição 1.

Caso (II) a) Suponhamos $(\vec{u}, \vec{v})$ LD. Se um dos dois vetores é nulo, ele é gerado pelo outro; suponhamos então $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Da hipótese, concluímos que existem representantes (A, B) de $\vec{u}$ e (A, C) de $\vec{v}$ tais que A, B e C são colineares, $A \neq B$ e $A \neq C$. Seja $\alpha = \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, temos $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ e se têm sentido contrário, $\vec{v} = (-\alpha)\vec{u}$. Logo $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u}$(*). Compare com o Exercício 5 do Capítulo 3.

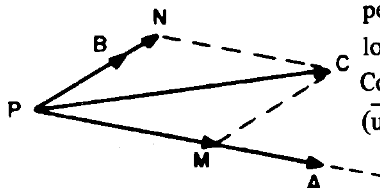
b) Reciprocamente, suponha que $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ e que nenhum dos dois vetores é nulo (caso em que não haveria nada a demonstrar). Seja (A, B) um representante de $\vec{u}$. Da definição de multiplicação de vetor por escalar, concluímos que o representante de $\vec{v}$ com origem A tem sua extremidade C na reta que passa por A e B. Logo, A, B e C são colineares e isso quer dizer que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD.

Caso (III) a) Suponhamos $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LD. Se o par $(\vec{u}, \vec{v})$ for LD, teremos pelo que já foi provado (caso (II)) que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ (ou $\vec{v} = \beta \vec{u}$). Nesse caso, $\vec{u} = \alpha \vec{v} + 0\vec{w}$ (ou $\vec{v} = \beta \vec{u} + 0\vec{w}$) e está demonstrada a afirmação. Se, por outro lado, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, fazemos a seguinte construção geométrica: tomamos um ponto $P \in E^3$ e os representantes (P, A), (P, B) e (P, C) de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ respectivamente; P, B e A não são colineares, pois $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI. Pelo ponto C tomamos retas paralelas a PB e PA, determinando assim os pontos M e N (figura). Então, $(\vec{u}, \overrightarrow{PM})$ é LD, e pelo que já foi provado (caso II) temos $\overrightarrow{PM} = \alpha \vec{u}$. Da mesma forma, $\overrightarrow{PN} = \beta \vec{v}$. Notando agora que $\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, temos $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. Observe que os argumentos acima valem também para os casos em que $\vec{w} \,//\, \vec{u}$ ou $\vec{w} \,//\, \vec{v}$; apenas a figura seria diferente. Pense nisso.



(*) Note que no caso $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ não só $\vec{u}$ é gerado por $\vec{v}$, mas também $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u}$, pois $\alpha \neq 0$ e portanto de $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ segue $\vec{u} = \frac{1}{\alpha} \vec{v}$.

b) Reciprocamente, suponha que $\vec{w}$, por exemplo, é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, e que nenhum dos três vetores é nulo (pois nesse caso não há o que demonstrar). Sejam (P, A), (P, B) e (P, C) representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente. Se P, A e B são colineares, é claro que os quatro pontos estão num mesmo plano e portanto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD. Se, ao contrário, P, A e B determinam um plano, sendo $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u}$ e $\overrightarrow{PN} = \beta\vec{v}$ (veja a figura) temos que M pertence à reta PA, N pertence à reta PB, e portanto o paralelogramo PMCN está contido no plano determinado por P, A e B. Concluímos que os pontos P, A, B e C são coplanares e portanto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.



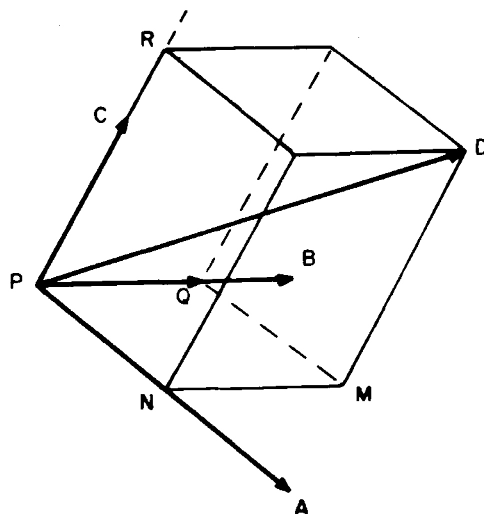
Caso (IV) Neste caso, precisamos provar apenas que se $n \geqslant 4$, então um dos vetores da seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é gerado pelos demais (a recíproca é automaticamente verdadeira, pois para $n \geqslant 4$ a seqüência é LD por definição). Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é LD, então, pelo que já vimos, um deles (por exemplo, $\vec{v}_1$) é gerado pelos outros dois:

$$\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3.$$

Segue-se que

$$\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_2\vec{v}_3 + 0\,\vec{v}_4 + ... + 0\,\vec{v}_n$$

e portanto $\vec{v}_1$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$. Suponhamos agora que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é LI e façamos a seguinte construção geométrica: sejam (P, A), (P, B), (P, C) e (P, D) respectivamente representantes de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$. Pelo ponto D, tomamos uma reta paralela a PC, que encontra o plano PAB no ponto M (por que essa reta não pode ser paralela ao plano PAB?). Pelo ponto M, tomamos retas paralelas a PA e PB, determinando assim os pontos N e Q (ver figura). Finalmente, pelo ponto D tomamos um plano paralelo ao plano PAB, que intercepta a reta PC num ponto R (por que esse plano não pode ser paralelo a PC?). É claro que $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \vec{v}_4$.



Por outro lado

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN})$ é LD $\Rightarrow \overrightarrow{PN} = \alpha_1\overrightarrow{PA} = \alpha_1\vec{v}_1$

$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PQ})$ é LD $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \alpha_2\overrightarrow{PB} = \alpha_2\vec{v}_2$

$(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PR})$ é LD $\Rightarrow \overrightarrow{PR} = \alpha_3\overrightarrow{PC} = \alpha_3\vec{v}_3$

Logo, $\vec{v}_4 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$ e portanto, $\vec{v}_4 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + 0\,\vec{v}_5 + \ldots + 0\,\vec{v}_n$, isto é, $\vec{v}_4$ é gerado pelos demais vetores da seqüência. Note que os argumentos acima valem também para os casos em que D pertence a uma das retas PA, PB, PC, ou a um dos planos PAB, PAC, PBC. Pense nisso e faça novas figuras. Fica assim demonstrada a Proposição 1.

Corolário 1 $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD $\iff$ existe α real tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou existe β real tal $\vec{v} = \beta\vec{u}$. Além disso, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são diferentes de $\vec{0}$, existem ambos, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, e $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

Corolário 2 Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, existem escalares α e β tais que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ (é o que foi demonstrado no Caso (III)). Na realidade, como se verá nos exercícios resolvidos, existe um único par de coeficientes α e β nessas condições.

Colorário 3 Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então todo vetor $\vec{x} \in V^3$, é gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isso quer dizer que para todo $\vec{x} \in V^3$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

(veremos logo mais, nos Exercícios Resolvidos, que essa tripla ordenada (α, β, γ) de escalares é determinada de modo único).

A proposição seguinte responde à pergunta a respeito de ser ou não ser possível obter o vetor nulo como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sem lançar mão do "golpe baixo" de tomar todos os escalares iguais a zero.

Proposição 2 Uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ de vetores de V^3 é LD se, e somente se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ NÃO TODOS NULOS tais que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Ou seja, se e somente se a equação $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admite solução não-trivial.

Exemplos

1) Seja $\vec{v}$ um vetor qualquer; a seqüência $(\vec{v}, -\vec{v})$ é LD, pois $1.\vec{v} + 1.(-\vec{v}) = \vec{0}$ (os escalares não são todos nulos).

2) A seqüência $(\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{u} - 3\vec{v})$ é LD, pois $(-2)\vec{u} + 3\vec{v} + 1 . (2\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{0}$.

3) Com o auxílio da Proposição 2, é bem fácil ver que qualquer seqüência na qual compareça o vetor nulo é LD. De fato, basta escolher coeficiente não nulo para o vetor

nulo e coeficientes nulos para os demais; para a seqüência $(\vec{0}, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$, por exemplo, temos:

$$1. \ \vec{0} + 0 . \vec{v}_2 + ... + 0 . \vec{v}_n = \vec{0}$$

e portanto $(\vec{0}, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LD.

Demonstração da Proposição 2

O caso n = 1 fica como exercício. Demonstremos para $n \geqslant 2$.

a) Suponhamos que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ seja LD. Nesse caso, pela Proposição 1, algum dos $\vec{v}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, é gerado pelos demais:

$$\vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + ... + \alpha_n \vec{v}_n$$

e daí vem que (passando $\vec{v}_j$ para o 2º membro)

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} - 1 . \vec{v}_j + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

o que mostra que existem escalares não todos nulos nas condições do enunciado (basta tomar $\alpha_j = -1$).

b) Reciprocamente, suponhamos que $\alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_j \vec{v}_j + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$, com $\alpha_j \neq 0$. Podemos daí concluir que:

$$\vec{v}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \vec{v}_1 - ... - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} \vec{v}_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} \vec{v}_{j+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} \vec{v}_n$$

ou seja, que $\vec{v}_j$ é combinação linear dos demais vetores da seqüência. Isso, pela Proposição 1, garante que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ é LD.

Observações

1. Uma forma equivalente de enunciar a Proposição 2 é:

Proposição 3 "Uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n)$ de vetores V^3 é LI se e somente se a equação $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + ... + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$ nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$. SÓ admite a solução trivial, isto é, $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... \alpha_n = 0$".

A implicação significa que é impossível obter o vetor nulo como combinação linear de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ a não ser daquela maneira que você achou "sem graça", escolhendo todos os coeficientes nulos.

2. Tome cuidado, pois neste ponto é muito fácil errar: na verificação de que uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LI, não se trata de saber se é **possível** obter o vetor nulo como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ (pois **sempre** é possível; na pior das hipóteses, escolhemos os escalares nulos). Tampouco se trata de saber se os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ **podem ser** ou **são** nulos (é claro que podem). Trata-se, isto sim, de verificar se é **obrigatório** apelar para coeficientes nulos para que a combinação linear resulte no vetor nulo. Se você entendeu, responda a esta pergunta:

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ vetores de V^3 e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ escalares tais que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Sabendo que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, o que se pode afirmar da seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$? É LI ou LD? Veja a resposta no fim deste parágrafo, após os exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ LI $(1 \leqslant n \leqslant 3)$. Prove que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + ... + \beta_n\vec{v}_n$$

só vale se $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$

(essa é a unicidade citada nos Corolários 2 e 3 da Proposição 1).

Resolução

Por hipótese, sabemos que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + ... + \beta_n\vec{v}_n$$

Daí segue que

$$\alpha_1\vec{v}_1 - \beta_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 - \beta_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n - \beta_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

e portanto

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{v}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\vec{v}_n = \vec{0}$$

e como $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LI, concluímos pela Proposição 3 que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ \alpha_2 - \beta_2 = 0, ..., \alpha_n - \beta_n = 0,$$

donde

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad ... \quad \alpha_n = \beta_n.$$

2. Prove a recíproca da propriedade do exercício anterior: se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é tal que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + ... + \beta_n\vec{v}_n$ só vale se $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$, então $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LI.

Resolução

Sabemos que $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + 0\vec{v}_n$. Então, se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são escalares tais que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$

segue-se que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + 0\vec{v}_n$$

Mas por hipótese, essa igualdade só vale se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$ (troque os "β_i" por 0 na hipótese).

Então, graças à Proposição 3, concluímos que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LI.

Observação

Os exercícios 1 e 2 acima mostram que você só poderá "identificar os coeficientes" (algo semelhante ao Princípio de Identidade de Polinômios) quando os vetores envolvidos forem LI. Exemplo: se $\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}$, tem-se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0\vec{u} + 3\vec{v} + 2\vec{w}$.

3. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ também é LI.

Resolução

Sejam α e β escalares tais que

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \qquad (\alpha)$$

Devemos demonstrar que α e β são obrigatoriamente nulos.

Aplicando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar, obtemos de (α) $\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{u} - \beta\vec{v} = \vec{0}$, donde $(\alpha + \beta)\vec{u} + (\alpha - \beta)\vec{v} = \vec{0}$. Mas, por hipótese, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI; logo, a igualdade acima só é possível se $\alpha + \beta = 0$ e $\alpha - \beta = 0$.

Como a única solução do sistema

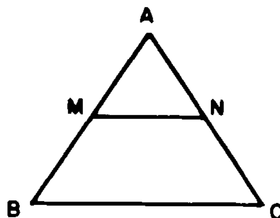
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

é $\alpha = \beta = 0$, provamos o que queríamos.

Atenção.

Seria péssima estratégia tentar resolver este exercício partindo de uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ igualada a $\vec{0}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. O motivo é que, como $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, isso acarreta $\alpha = \beta = 0$, e não se conclui absolutamente nada a respeito da dependência ou independência linear dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, o que era o nosso propósito. Assim, quando se quer provar a independência linear de uma seqüência de vetores, deve-se partir de uma combinação linear dos vetores *dessa seqüência*, igual a $\vec{0}$.

4. Na figura, ABC é um triângulo e M é o ponto médio de AB. Sabendo que MN é paralelo a BC, prove que N é o ponto médio de AC.



Resolução

Vamos transpor o problema para a linguagem vetorial.

Se ABC é um triângulo, temos (por exemplo) que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \text{ é LI} \qquad (\alpha)$$

Sendo M o ponto médio de AB, concluímos que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \qquad (\beta)$$

A hipótese de ser MN paralelo a BC se traduz por

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\,\overrightarrow{BC} \qquad (\gamma)$$

Finalmente, como N pertence ao lado AC, podemos afirmar que

$$\overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AC} \qquad (\delta)$$

Agora, nosso objetivo é provar que $\beta = \frac{1}{2}$

De $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}$ segue por (β) e (γ):

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (\epsilon)$$

Por outro lado, por (δ),

$$\overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AC} = \beta(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) = \beta\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{AB} \qquad (\lambda)$$

Comparando (ϵ) e (λ), obtemos:

$$\alpha\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{AB}$$

Agora, por (α) e pelo primeiro exercício, concluímos que $\alpha = \beta$ e $\frac{1}{2} = \beta$, como queríamos. Observe que fica também provado que o comprimento de MN é igual à metade do comprimento de BC.

Agora a resposta à pergunta feita na Observação 2: nada se pode afirmar a respeito da dependência linear dos vetores.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v})$ também é LI, o mesmo sucedendo com $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$.

2. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI. Dado $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem α, β, γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (por quê?). Prove que $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\Longleftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

3. Prove que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI $\Longleftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LI. (A implicação $\Rightarrow$ foi provada no Exercício Resolvido nº 3.)

4. Demonstre a Proposição 2 no caso $n = 1$. Pergunta: por que a demonstração feita no texto não serve neste caso?

5. Prove que $(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w})$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

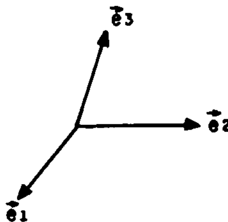
CAPÍTULO 6

BASE

Definição 1

Chama-se base V^3 a qualquer tripla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ linearmente independente de vetores de V^3.

Conforme o Corolário 3 do capítulo anterior, se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base de V^3, todo vetor de V^3 é gerado por $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, isto é para todo $\vec{v} \in V^3$, existem escalares a_1, a_2, a_3, tais que $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.



Sabemos também que essa tripla (a_1, a_2, a_3) de escalares é única (veja o primeiro exercício resolvido do capítulo anterior). A conclusão é que, escolhida uma base E de V^3, fica associada univocamente a cada vetor $\vec{v}$ uma tripla ordenada de escalares (a_1, a_2, a_3). Essa tripla é denominada *tripla de coordenadas do vetor $\vec{v}$ em relação à base E.* Observe que é importante a *ordem* dos escalares a_1, a_2, a_3; trata-se de uma tripla ordenada. Se, por abuso de linguagem, dissermos: "a_1, a_2, e a_3 são as coordenadas de $\vec{v}$ na base E", fica subentendido que as coordenadas estão *nessa ordem* $(\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)$.

A notação utilizada para indicar que a_1, a_2, a_3 são as coordenadas (nessa ordem!!) do vetor $\vec{v}$ em relação à base E é

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)_E \qquad (1)$$

e se não houver perigo de dúvida quanto à base escolhida, omite-se o índice "E":

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) \qquad (2)$$

Em outros termos, (1) e (2) são simplesmente "abreviaturas" de $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

Daqui para a frente, o uso de coordenadas será muito freqüente; é conveniente, portanto, que as operações entre vetores sejam feitas diretamente em coordenadas, evitando perda de tempo. Vejamos como se faz isso:

a) **Adição** Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$, então $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E$

De fato:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E \Rightarrow \vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E \Rightarrow \vec{v} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

Logo,

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$$

ou seja,

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)_E$$

Atenção

Para o procedimento acima é essencial que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estejam referidos a uma *mesma* base.

b) **Multiplicação por Escalar** Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$ e λ é um escalar, então

$$\lambda\vec{u} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_E.$$

De fato:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E \Rightarrow \vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Rightarrow \lambda\vec{u} = \lambda(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) =$$

$$= (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \Rightarrow \lambda\vec{u} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_E$$

Observação Devido à Proposição 3, é fácil ver que

$$\vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u} = (0, 0, 0)_E$$

Vamos reexaminar em termos de coordenadas o conceito de dependência e independência linear.

Proposição 1 Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E$, e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E$ são LD se e somente se x_1, y_1, z_1, são proporcionais a x_2, y_2, z_2.

Demonstração

É uma conseqüência direta do Corolário 1 do Capítulo 5.

Proposição 2 $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_E$ são LI se e somente se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração

Temos, pela Proposição 3 do Capítulo 5, que

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ LI} \iff (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0).$$

isto é

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI $\iff \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) + \gamma(x_3, y_3, z_3) = 0$ admite apenas a solução nula $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\iff \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \end{cases} \quad \text{admite apenas a solução nula}$$

$$\overset{(*)}{\iff} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Basta observar agora que este último determinante é igual ao que aparece no enunciado.

(*) Devido à Regra de Cramer.

O conceito de ortogonalidade de vetor com retas e planos se define de modo natural, usando os mesmos conceitos para os segmentos orientados que representam o vetor. Mais claramente:

Definição 2

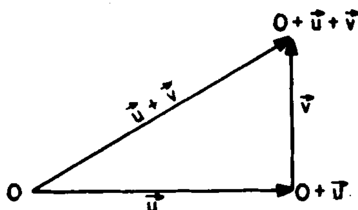
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ é *ortogonal* à reta r [ao plano π] se existe um representante (A, B) de $\vec{u}$ tal que o segmento AB é ortogonal a r [a π]. O vetor nulo é considerado ortogonal a toda reta r e a todo plano π.
- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortogonais* se um deles é nulo, ou, caso contrário, admitirem representantes perpendiculares.

Para ortogonalidade usaremos o símbolo $\perp$.

Proposição 3 Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se e somente se $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

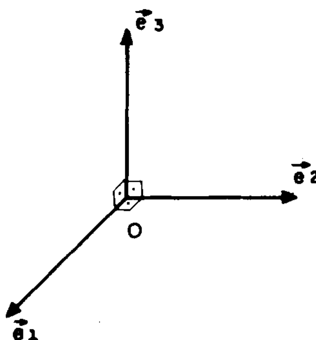
Demonstração

Trata-se em essência da aplicação do Teorema de Pitágoras e de sua recíproca. Deixando de lado os casos triviais em que um dos vetores é nulo (a verificação é imediata), basta observar que, tomando um ponto O qualquer, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se os pontos O, O + $\vec{u}$, O + $\vec{u}$ + $\vec{v}$, são vértices de um triângulo retângulo.



Definição 3

Uma base E = ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) é *ortonormal* se $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ são unitários ($\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$) e dois a dois ortogonais.

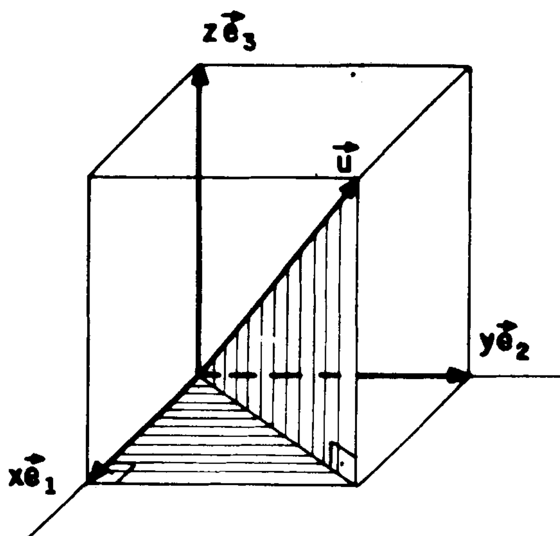


Proposição 4 Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base ortonormal, e $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Demonstração

Consiste na aplicação do Teorema de Pitágoras aos dois triângulos retângulos destacados na figura.



Vejamos. Como $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$ e $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$, resulta $z\vec{e}_3 \perp x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ (por quê?). Logo, pela proposição anterior, como $\vec{u} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) + z\vec{e}_3$,

$$\|\vec{u}\|^2 = \|x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2\|^2 + \|z\vec{e}_3\|^2$$

Como também $x\vec{e}_1 \perp y\vec{e}_2$, resulta, pela mesma proposição, que esta relação se escreve

$$\|\vec{u}\|^2 = \|x\vec{e}_1\|^2 + \|y\vec{e}_2\|^2 + \|z\vec{e}_3\|^2 \qquad (3)$$

e como $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são unitários,

$$\|x\vec{e}_1\|^2 = |x|^2 = x^2$$

$$\|y\vec{e}_2\|^2 = |y|^2 = y^2$$

$$\|z\vec{e}_3\|^2 = |z|^2 = z^2$$

de onde resulta, por substituição em (3), a tese.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Está fixada uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2)$.

1. Verifique se são LI ou LD os vetores

a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 7, 1)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

Resolução

a) É imediato que 1, 2, 3, e 2, 1, 1, não são proporcionais pois $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$. Logo $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI.

b) Nesse caso é claro que 1, 7, 1 e $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}$ são proporcionais, com fator de proporcionalidade 2 : $\vec{u} = 2\vec{v}$. Logo $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD.

2. Idem para $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (0, 1, 3)_E$, $\vec{w} = (4, -3, 11)_E$.

Resolução

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{resulta } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ LD.}$$

3. Sejam

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

Mostre que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é LI e portanto base de V^3.

Resolução

Tem-se $\vec{f}_1 = (2,-1,0)_E$, $\vec{f}_2 = (1,-1,2)_E$, $\vec{f}_3 = (1,0,2)_E$

e

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \text{ logo } (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \text{ é LI.}$$

4. Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1,1,1)_E$ na base F do exercício anterior.

Resolução

Sabemos que

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

Resolvendo as equações acima com relação a $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, e $\vec{e}_3$, você obterá:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{f}_1 - \frac{1}{2}\vec{f}_2 + \frac{1}{2}\vec{f}_3$$

$$\vec{e}_2 = -\vec{f}_2 + \vec{f}_3$$

$$\vec{e}_3 = -\frac{1}{4}\vec{f}_1 + \frac{1}{4}\vec{f}_2 + \frac{1}{4}\vec{f}_3$$

como $\vec{v} = (1,1,1)_E$, temos $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

e portanto

$$\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{f}_1 - \frac{5}{4}\vec{f}_2 + \frac{7}{4}\vec{f}_3$$

donde $\vec{v} = (\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4})_F$, isto é, as coordenadas de $\vec{v}$ na base F são $\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{4}$ e $\frac{7}{4}$.

No próximo capítulo, veremos uma forma de sistematizar os cálculos acima, na resolução de problemas de "mudanças de base" como este.

5. Calcule $\|\vec{u}\|$ sendo $\vec{u} = (2, 1, 3)_E$ e E base ortonormal.

Resolução

$$\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14 \quad \therefore \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{14}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Todos os vetores estão referidos a uma mesma base

1. Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$, $\vec{w} = (-1, -1, 4)$, ache as coordenadas de

   a) $\vec{u} + \vec{v}$
   b) $\vec{u} - 2\vec{v}$
   c) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

2. Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, como no exercício anterior.

3. Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, estes vetores sendo dados no exercício 1.

4. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?

5. Ache m de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)$. Em seguida, determine m para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja LD.

6. Decida se são LI ou LD:

   a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ LI
   b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ LI
   c) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3, 1)$
   d) $\vec{u} = (1, -3, 14)$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)$ LD
   e) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ $\vec{v} = (200, 2, 1)$, $\vec{w} = (300, 1, 2)$ LI
   f) $\vec{u} = (1, 2, 1)$ $\vec{v} = (1, -1, -7)$, $\vec{w} = (4, 5, -4)$ L
   g) $\vec{u} = \vec{0}$
   h) $\vec{u} = (1, 1, 1)$

7. Sendo E = $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ base, e

$$\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$$
$$\vec{f_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$$
$$\vec{f_3} = \vec{e_3}$$

decida se f = $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base.

8. Ache m para que sejam LD

a) $\vec{u} = (m, 1, m)$, $\vec{v} = (1, m, 1)$
b) $\vec{u} = (1-m^2, 1-m, 0)$, $\vec{v} = (m, m, m)$
c) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$
d) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$, $\vec{w} = 0, m, 2m)$

9. Se E = $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é base, prove que F = $(\alpha\vec{e_1}, \beta\vec{e_2}, \gamma\vec{e_3})$ é base, desde que α, β, γ não sejam nulos.

10. Seja OABC um tetraedro, e M o ponto médio de BC.

a) explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é uma base.
b) determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.

11. Calcule $\|\vec{u}\|$, sendo E = $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ base ortonormal, nos casos

a) $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} = (1, 1, 1)_E$
b) $\vec{u} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$
c) $\vec{u} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_3}$
d) $\vec{u} = -4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$

CAPÍTULO 7

MUDANÇA DE BASE

A escolha de uma base conveniente ajuda muita vezes a resolver um problema, tornando-o mais simples. Acontece que os vetores dados podem já estar referidos a uma certa base, digamos $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Introduzindo-se a base conveniente que supostamente vai ajudar-nos, seja ela $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, precisamos saber a relação entre as duas, para que trabalhando com a solução em termos de F, possamos no final passar para a base inicial E.

Podemos expressar de modo único cada elemento de F em termos da base E, conforme já sabemos. Escrevamos então

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

onde os a_{ij} são números reais.

O próximo passo agora é resolver o seguinte problema. É dado

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3)_E \qquad (2)$$

onde agora o índice E é necessário, pois podemos também escrever

$$\vec{v} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = (y_1, y_2, y_3)_F \qquad (3)$$

Queremos saber qual é a relação entre as coordenadas x_1, x_2, x_3 de $\vec{v}$ em relação à base E, e as coordenadas y_1, y_2, y_3 do mesmo vetor $\vec{v}$ em relação à base F. A idéia é muito simples para resolver isto. Usando (1) em (3), teremos $\vec{v}$ em função dos elementos de E. Em seguida é só comparar com (2).

Substituindo $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ dados por (1) na relação (3) resulta

$$\vec{v} = y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3)$$

$$= (y_1a_{11} + y_2a_{12} + y_3a_{13})\vec{e}_1 + (y_1a_{21} + y_2a_{22} + y_3a_{23})\vec{e}_2 + (y_1a_{31} + y_2a_{32} + y_3a_{33})\vec{e}_3$$

Comparando com (2), e usando o fato de que um vetor se expressa de modo único como combinação linear dos elementos de uma base, vem

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

Agora basta resolver o sistema. Acontece que você deve estar dizendo: puxa, mas como eu vou guardar essa relação? Ainda mais com essa confusão de índices! Pois bem, para facilitar a sua vida, vamos sistematizar de tal forma que você, temos certeza, vai guardar a fórmula. Para esse fim vamos usar matrizes. Observe inicialmente que (4) pode ser escrita assim:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Vamos dar um nome à matriz 3 x 3 acima.

Definição

Dadas as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

À matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dá-se o nome de *matriz de mudança da base E para a base F.* Indica-se, para resumir, assim:

$$E \xrightarrow{M} F$$

Atenção

Observe que os elementos a_{11}, a_{21}, a_{31} que aparecem na 1ª igualdade,

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3,$$

devem ficar na 1ª coluna de M. Da mesma forma, os elementos da 2ª igualdade,

$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3,$$

devem ficar na 2ª coluna de M. Os da 3ª igualdade na 3ª coluna de M. Assim, se

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \longrightarrow$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \dashrightarrow$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rightsquigarrow$$

Então

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora que você já sabe o que é matriz de mudança de E para F, $E \xrightarrow{M} F$, veja como (5) por ser escrita simbolicamente:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}_E = M \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}_F} \qquad (6)$$

onde

$$E \xrightarrow{M} F$$

Observação

Se $E \xrightarrow{M} F$, então o determinante da matriz M é certamente diferente de zero. Isso é uma conseqüência imediata da Proposição 2, do capítulo anterior. Logo, existe M^{-1}, e de (6) obtemos

$$\boxed{M^{-1}\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_F} \qquad (7)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, ache M, matriz de mudança de E para F, sabendo que

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Resolução

Escrevendo na forma

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= 1.\ \vec{e}_1 + (-1)\ \vec{e}_2 + 0.\ \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= 0.\ \vec{e}_1 + 0.\ \vec{e}_2 + 1.\ \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= 0.\ \vec{e}_1 + 1.\ \vec{e}_2 + 1.\ \vec{e}_3 \end{aligned}$$

vemos que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Sendo E e F como no exercício anterior, e sendo $\vec{v} = (1, -1, 3)_F = \vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 3\vec{f}_3$, ache as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base E.

Resolução

Como você já deve estar sabendo,

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_E = M \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_F$$

onde

$$E \xrightarrow{M} F.$$

Então, sendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)_E = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \qquad x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2.$

3. A matriz de mudança de base da base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ para a base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exprima os elementos de F em termos da base E.

Resolução

Para $\vec{f}_1$, leia a 1ª coluna:

$$\vec{f}_1 = 1 \,.\, \vec{e}_1 + 0 \,.\, \vec{e}_2 + 1 \,.\, \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

Para $\vec{f}_2$, leia a 2ª coluna:

$$\vec{f}_2 = 0 \,.\, \vec{e}_1 + 1 \,.\, \vec{e}_2 + 0 \,.\, \vec{e}_3 = \vec{e}_2$$

Para $\vec{f}_3$, leia a 3ª coluna:

$$\vec{f}_3 = 1 \,.\, \vec{e}_1 + 0 \,.\, \vec{e}_2 + (-1)\vec{e}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$$

A seguir vamos ver um resultado útil.

Proposição 1 Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ bases.

Então, se $E \xrightarrow{M} F$, $F \xrightarrow{N} G$, tem-se $E \xrightarrow{MN} G$ (*)

(*) O esquema $E \xrightarrow{M} F \xrightarrow{N} G$ (com $E \xrightarrow{MN} G$) ajuda a memorizar resultado.

Demonstração

Sendo $M = (a_{ij})$, $N = (b_{ij})$, e sendo $P = (c_{ij})$ a matriz de mudança de E para G, temos, por definição

$$\vec{g}_k = \sum_{j=1}^{3} b_{jk}\vec{f}_j \tag{8}$$

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i \tag{9}$$

Substituindo $\vec{f}_j$ dado em (9) na relação (8):

$$\vec{g}_k = \sum_{j=1}^{3} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} b_{jk}\,a_{ij}\,\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,b_{jk}\right)\vec{e}_i \tag{10}$$

Como

$$\vec{g}_k = \sum_{i=1}^{3} c_{ik}\vec{e}_i \tag{11}$$

resulta de (10) e (11) que $c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk}$ ou seja $P = MN$.

Observação

Se você não está habituado a usar somatória como acima, o jeito é escrever tudo por extenso; você verá que o que se fez não é complicado, e perceberá a vantagem do uso de somatória.

Corolário: Se $E \xrightarrow{M} F$, então $F \xrightarrow{M^{-1}} E$.

Demonstração

A matriz de mudança de E para E é a matriz identidade I (por que?). Sendo N a matriz de mudança de F para E temos, pela proposição acima, que $MN = I$, logo $N = M^{-1}$.

$$E \xrightarrow{M} F \xrightarrow{N} E, \qquad E \xrightarrow{I} E$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS (continuação)

4. Ache a matriz de mudança da base F para a base E no caso do Exercício Resolvido 1. Exprima $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ segundo a base F.

Resolução

Sendo $E \xrightarrow{M} F$, vimos no referido exercício que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então $F \xrightarrow{M^{-1}} E$, e precisamos calcular M^{-1}:

A matriz dos cofatores de M é:

$$M_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M_c^t$$

onde M_c^t indica a transposta de M_c. No caso presente,

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta é a resposta da primeira parte do exercício. Quanto à segunda, decorre facilmente do conhecimento de M^{-1}, pois $F \xrightarrow{M^{-1}} E$. Então

$\vec{e}_1 = \vec{f}_1 - \vec{f}_2 + \vec{f}_3$ (v. 1ª coluna de M^{-1})
$\vec{e}_2 = -\vec{f}_2 + \vec{f}_3$ (v. 2ª coluna de M^{-1})
$\vec{e}_3 = \vec{f}_2$ (v. 3ª coluna de M^{-1})

5. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ bases, onde

$$\text{(I)} \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 \\ \vec{e}_2 = \vec{f}_1 - \vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 = \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases}$$

ache as matrizes de mudança de

(i) E para F (ii) F para G (iii) E para G

(iv) F para E (v) G para F (vi) G para E

Resolução

Sendo $E \xrightarrow{M} F$, então $F \xrightarrow{M^{-1}} E$. Das relações (I) resulta imediatamente

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (resposta de (iv))}$$

e daí,

$$M = (M^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (resposta de (i))}$$

Sendo $F \xrightarrow{N} G$, $E \xrightarrow{M} F$, então $E \xrightarrow{MN} G$. De (II) vem imediatamente

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ (resposta de (iii))}$$

$$\therefore\ N = M^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

logo

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ (resposta de (ii))}$$

Como F $\xrightarrow{N}$ G, então G $\xrightarrow{N^{-1}}$ F; calculando, resulta

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} -5/3 & 1 & -4/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ -4/3 & 1 & -5/3 \end{bmatrix}$$ (resposta de (v))

Sendo E $\xrightarrow{MN}$ G, então G $\xrightarrow{(MN)^{-1}}$ E. Mas

$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} -5/3 & 1 & -4/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ -4/3 & 1 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$(MN)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$ (resposta de (vi))

6. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases tais que

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

Sendo $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, ache as coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base F.

Resolução

Sendo E $\xrightarrow{M}$ F temos, por (7), que

$$M^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_F$$

Temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e daí } M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Então

$$M^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\vec{u} = -11\vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 14\vec{f}_3$, ou $\vec{u} = (-11, -1, 14)_F$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dê a matriz de mudança da base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ para a base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ nos casos

(a)
$$\vec{f}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

(b)
$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1$$
$$\vec{f}_3 = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$

2. Sendo $\vec{v} = -4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3$ ache $\vec{v}$ em função de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, nos casos do Exercício 1.

3. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases, com

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = 7\vec{e}_3$$

e $\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, ache $\vec{w}$ em termos da base F.

4. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ bases, com

$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{f}_1 - \frac{1}{2}\vec{f}_3 \qquad \vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{f}_3 \qquad \vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

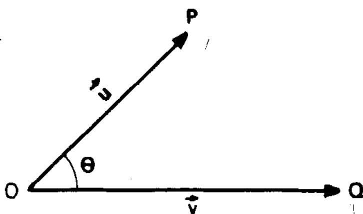
$$\vec{e}_3 = \vec{f}_2 \qquad \vec{g}_3 = \vec{e}_1$$

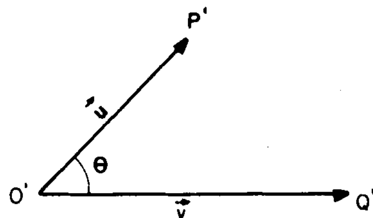
Ache todas as matrizes de mudança.

CAPÍTULO 8

ÂNGULO ENTRE VETORES
PRODUTO ESCALAR

Consideremos os vetores *não nulos* $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Tomemos um ponto $O \in E^3$, e sejam $P, Q \in E^3$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$. Seja θ a medida em radianos [graus] do ângulo POQ satisfazendo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ $[0 \leqslant \theta \leqslant 180]$.





Se tivéssemos tomado outro ponto $O' \in E^3$ em lugar de O, e P', Q' com $\vec{u} = \overrightarrow{O'P'}$, $\vec{v} = \overrightarrow{O'Q'}$ obteríamos que a medida em radianos [graus] de $P'\hat{O}'Q'$, ainda seria θ (veja a figura).

Definição 1

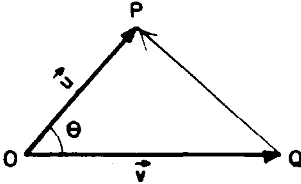
O número θ se chama *medida em radianos* [*graus*] *do ângulo entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Procuraremos agora uma expressão que nos forneça θ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para isso, fixemos uma base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, e sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ (lembre-se de que.

sendo a base *ortonormal*, a norma de qualquer vetor pode ser calculada como vimos no Capítulo 6, isto é,

$$\vec{w} = (a, b, c) \Rightarrow \|\vec{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}).$$

Aplicando a lei dos co-senos ao triângulo POQ resulta



$$\|\vec{QP}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta \qquad (1)$$

Mas

$$\|\vec{QP}\|^2 = \|\vec{OP} - \vec{OQ}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

Substituindo em (1), resulta

$$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (2)$$

expressão esta que nos permite calcular cos θ, pois $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Observemos (2). Ela nos mostra que a expressão $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ não depende da base ortonormal fixada, pois o primeiro membro não depende. Em outras palavras, se você tomasse outra base ortonormal $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ e escrevesse $\vec{u} = (x_1', y_1', z_1')$, $\vec{v} = (x_2', y_2', z_2')$, então $x_1'x_2' + y_1'y_2' + z_1'z_2' = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 (= \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|\cos\theta)$. Observemos também que se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ são nulos, a expressão do 2º membro é nula.

Definição 2

Chama-se *produto escalar* dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao número $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (*) dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0}, \end{cases} \qquad (3)$$

sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(*) Usa-se também a notação $\vec{u} \times \vec{v}$.

De acordo com o que vimos acima, podemos escrever

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2} \tag{4}$$

desde que as coordenadas usadas se refiram a uma base ortonormal.

Resulta de (3) que se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}} \tag{5}$$

Observe que decorre da própria definição que

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}} \tag{6}$$

pois $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \|\vec{u}\|^2$

Proposição 1

Quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V^3 e qualquer que seja λ real, tem-se

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

2. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

As demonstrações são extremamente simples. A nº 4, por exemplo, decorre de $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$; as outras seguem da definição. Deixamo-las a seu cargo.

Proposição 2 $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Demonstração

Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, é imediato. Senão, decorre da fórmula (5), que nos diz que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

(*) Lembre-se de que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Observação

A Definição 2, a fórmula (6) e a Proposição 2 nos permitem caracterizar as bases ortonormais do seguinte modo:

"uma condição necessária e suficiente para que uma tripla $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vetores de V^3 seja uma base ortonormal é que

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \tag{7}$$

e

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \tag{8}$$

Resumindo: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$. De fato, (7) garante que os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são unitários, e (8) garante que eles são dois a dois ortogonais. Restaria apenas provar que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é LI. Para isso, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ números reais tais que

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{e}_1$, e aplicando a Proposição 1 (partes 1 e 2), obtemos:

$$\alpha_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + \alpha_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \alpha_3 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) = 0.$$

e por (7) e (8), chegamos a $\alpha_1 . 1 + \alpha_2 . 0 + \alpha_3 . 0 = 0$ ou seja $\alpha_1 = 0$.

Procedendo de modo análogo, você pode provar que $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Segue-se que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é L I.

Atenção

Evite o erro seguinte: sendo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, cancelar $\vec{u}$ e concluir que $\vec{v} = \vec{w}$. Isto é falso! Veja um procedimento correto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$$

a última equivalência sendo garantida pela Proposição 2, e a penúltima, pela Proposição 1 (partes 1 e 2, com $\lambda = -1$). Para obter concretamente um contra-exemplo, tome $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (4, 2, 1)$, $\vec{w} = (4, 1, 1)$, em relação a uma base ortonormal. Então $\vec{v} \neq \vec{w}$, e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 = \vec{u} \cdot \vec{w}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

É fixada uma base ortonormal

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 0, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Resolução

Temos

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 0, -3) \cdot (1, 1, 1) = 2 \,.\, 1 + 0 \,.\, 1 + (-3) \,.\, 1 = -1$

$\|\vec{u}\| = \|(2, 0, -3)\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\|\vec{v}\| = \|(1, 1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{39}}$$

$$\therefore \quad \theta = \text{arc cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{39}}\right)$$

2. Ache a medida em graus do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 10, 200)$ e $\vec{v} = (-10, 1, 0)$.

Resolução

Temos

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 10, 200) \cdot (-10, 1, 0) = 1 \,.\, (-10) + 10 \,.\, 1 + 200 \,.\, 0 = 0$

Logo: $\vec{u} \perp \vec{v}$, e $\theta = 90$ (em graus).

3. Mostre que

(a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Resolução

(a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u}+\vec{v}) =$

$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 =$

$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(b) $\frac{1}{2} (\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \overset{(a)}{=}$

$= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

4. Demonstre a desigualdade de Schwarz:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Resolução

Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, é imediato, pois ambos os membros se anulam.
Se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então a desigualdade de Schwarz resulta imediatamente de

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad \text{e} \quad |\cos\theta| \leqslant 1 .$$

Observe que a *igualdade* vale se e somente se um dos dois vetores é nulo ou, caso contrário, se $|\cos\theta| = 1$ (veja o Exercício 26c).

5. Se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal e $\vec{u} \in V^3$, então

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$$

(veja a 1ª observação após o Exercício Resolvido nº 7).

Resolução

Sabemos que existem (únicos) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reais tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \qquad (\alpha)$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{e}_1$ ambos os membros, resulta

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \alpha_1 \|\vec{e}_1\|^2 + \alpha_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1$$

Como a base é ortonormal tem-se $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$, $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$. Logo

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \alpha_1 \qquad (\beta)$$

Analogamente, utilizando $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, respectivamente, chega-se a

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = \alpha_2 \qquad (\gamma)$$

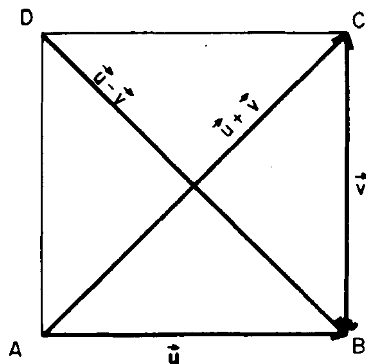
$$\vec{u} \cdot \vec{e}_3 = \alpha_3 \qquad (\delta)$$

Substituindo (β), (γ), (δ), em (α), obtém-se a igualdade desejada.

6. Prove que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

Resolução

Considere um quadrado A B C D como na figura. Então, sendo $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$, basta provar que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$.



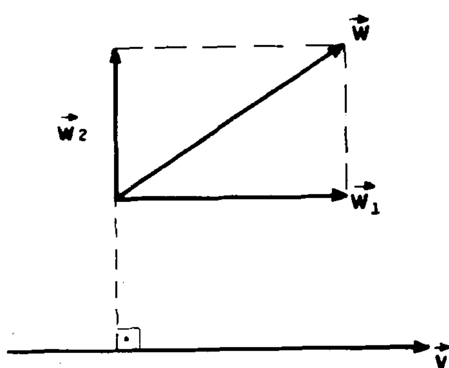
Mas

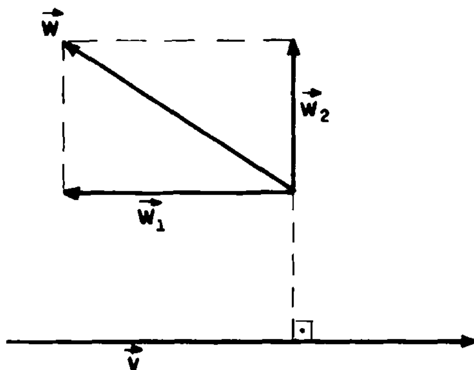
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$

já que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Pergunta: Onde entrou o fato de ser $\vec{u} \perp \vec{v}$? Veja o Exercício 22a.

7. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$ fixado. Dado um vetor $\vec{w}$, existe um único par ordenado $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ com $\vec{w}_1 // \vec{v}$, $\vec{w}_2 \perp \vec{v}$ e $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$; $\vec{w}_1$ se chama *projeção de* $\vec{w}$ *na direção de* $\vec{v}$ (ou *sobre* $\vec{v}$), e se indica por $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$





Prove que

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w} = \vec{w}_1 = \left(\vec{w} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$$

Resolução

Como $\vec{w}_1 \,//\, \vec{v}$, temos

$$\vec{w}_1 = \lambda \vec{v} \qquad (\alpha)$$

donde $\vec{w} = \lambda \vec{v} + \vec{w}_2$. Multiplicando escalarmente por $\vec{v}$, obtemos $\vec{w} \cdot \vec{v} = \lambda \|\vec{v}\|^2 + \vec{w}_2 \cdot \vec{v} =$ $= \lambda \|\vec{v}\|^2$ (pois $\vec{w}_2 \perp \vec{v}$). Daí, $\lambda = \dfrac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$. Substituindo em ($\alpha$) resulta a tese.

Observações

1. Se $\vec{v}$ é unitário, $\|\vec{v}\| = 1$, então

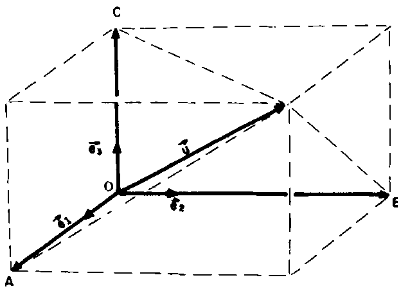
$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{v})\,\vec{v}$$

O Exercício Resolvido nº 5 pode, então, ser re-enunciado como segue:

"Se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal e $u \in V^3$, então

$$\vec{u} = \text{proj}_{\vec{e}_1}\,\vec{u} + \text{proj}_{\vec{e}_2}\,\vec{u} + \text{proj}_{\vec{e}_3}\,\vec{u}$$

(veja a figura), pois



$$\vec{OA} = \text{proj}_{\vec{e}_1} \vec{u}$$

$$\vec{OB} = \text{proj}_{\vec{e}_2} \vec{u}$$

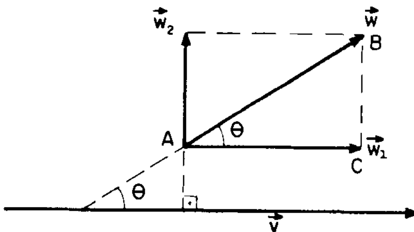
$$\vec{OC} = \text{proj}_{\vec{e}_3} \vec{u}$$

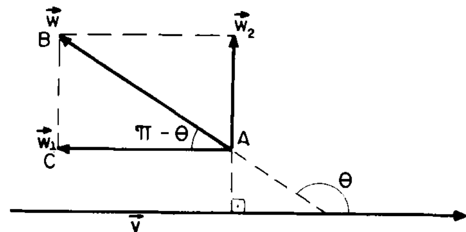
$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{u}$$

2 Lembrando que $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$ (veja o Capítulo 3), temos que a norma da projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$ é dada por:

$$\|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}\| = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|^2} \|\vec{v}\| = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

Outro modo de ver isso é observar na figura abaixo o triângulo retângulo ABC, onde $\|\vec{w}_1\| =$
$= \|\vec{w}\| \cdot |\cos\theta| = \|\vec{w}\| \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|} = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$





8. Dada a base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$, onde $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ são unitários e ortogonais, obtenha $\vec{e}_3$ tal que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ seja uma base ortonormal.

Resolução

Suponhamos obtido $\vec{e}_3$. Então, pelo Exercício Resolvido nº 5 devemos ter

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$$

logo, chamando de $\vec{t}$ o vetor $(\vec{u} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$, devemos ter

$$\vec{t} = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2$$

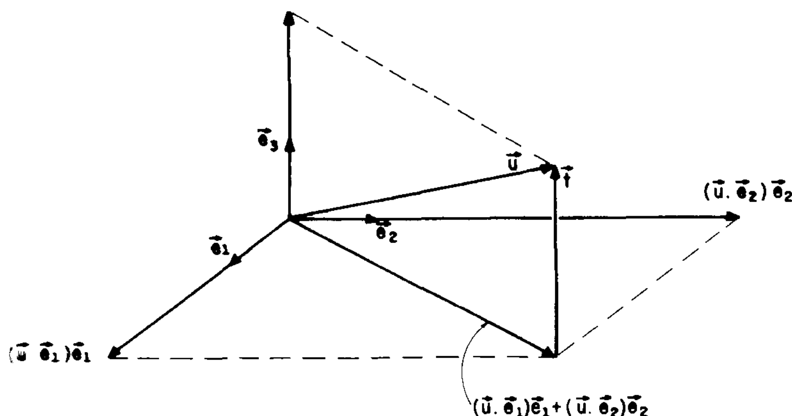
Considere agora o vetor $\vec{t}$, definido por esta expressão. Então $\vec{t} \neq \vec{0}$ (senão $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$ seria LD) e $\vec{t} \perp \vec{e}_1$, $\vec{t} \perp \vec{e}_2$, pois

$$\begin{aligned}\vec{t} \cdot \vec{e}_1 &= (\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 \\ &= \vec{u} \cdot \vec{e}_1 - (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) - (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{e}_1 - \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = 0\end{aligned}$$

e analogamente $\vec{t} \cdot \vec{e}_2 = 0$. Assim $\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{t}}{\|\vec{t}\|}$ resolve o problema.

Observação

É importante que você tenha uma visão geométrica da construção de $\vec{t}$, para escrever sua expressão sem decorá-la. Veja na figura que $\vec{t}$ se obtém subtraindo de $\vec{u}$ suas projeções ortogonais sobre $\vec{e}_1$ e sobre $\vec{e}_2$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Fixa-se uma base ortonormal.

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$

b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$

c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$

d) $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$

e) $\vec{u} = (300, 300, 0)$, $\vec{v} = (-2000, -1000, 2000)$ (procure vetores com coordenadas mais simples tais que a medida do ângulo formado seja a mesma).

2. Ache x de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$ nos casos

a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$, $\vec{v} = (1, x, 3)$

b) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$

c) $\vec{u} = (x+1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x-1, -1, -2)$

d) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$

3. Sejam A, B e C três pontos de E^3, e sejam $\vec{c} = \vec{BA}$ e $\vec{a} = \vec{BC}$. Mostre que o vetor $\vec{u} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} + \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ é paralelo à bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Interprete este resultado, relacionando-o com uma conhecida propriedade dos losangos.

Sugestão: Calcule os co-senos dos ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{c}$ e entre $\vec{u}$ e $\vec{a}$, e compare-os.

4. Ache $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{w} = (2, -4, 6)$. Dos "$\vec{u}$" encontrados, qual o que forma ângulo agudo com o vetor $(1, 0, 0)$?

5. Ache $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$, e que satisfaz $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.

6. Ache $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $(2, 1, -1)$, tal que $(\vec{u}, (1, 1, 1), (0, 1, -1))$ seja LD.

7. Ache $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, a medida em graus do ângulo entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ seja 45, e $\vec{u} \perp (1, 1, 0)$.

8. Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{DA}$ sabendo que o tetraedro ABCD é regular, de aresta unitária.

9. Calcule $\| 2\vec{u} + 4\vec{v} \|^2$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, e a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2\pi}{3}$.

10. Se A, B, C são vértices de um triângulo equilátero de lado unitário, calcule:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$$

11. Se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$, $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

12. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$. Sabendo que $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, e $\|\vec{v}\| = 1$, ache a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

13. Fixada uma base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, e tomado $\vec{v} \neq \vec{0}$, chamam-se *co-senos diretores de* $\vec{v}$ *relativamente à base fixada* os números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, onde α, β, γ, são as medidas dos ângulos que $\vec{v}$ forma, respectivamente, com $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

a) Sendo $\vec{v} = (x, y, z)$, prove que

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

b) Prove que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

c) Prove que os co-senos diretores de $\vec{v}$ são as coordenadas do versor de $\vec{v}$, isto é, de $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

d) Sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, de co-senos diretores $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ e $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, respectivamente, mostre que

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

e) Ache os co-senos diretores de $\vec{v} = (1, -3, \sqrt{6})$ e de $-\vec{v}$.

f) Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases ortonormais, mostre que a j-ésima coluna da matriz de mudança de E para F é formada pelos co-senos diretores de $\vec{f}_j$ em relação a E.

14. Ache a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{w} = (1, -1, 2)$ $\quad\vec{v} = (3, -1, 1)$

b) $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ $\quad\vec{v} = (-2, 1, 2)$

c) $\vec{w} = (1, 3, 5)$ $\quad\vec{v} = (-3, 1, 0)$

15. Decomponha $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, com $\vec{w}_1$ paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

16. Decomponha $\vec{w} = (1, 0, 3)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, com $\vec{w}_1$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 2)$ linearmente dependentes e $\vec{w}_2$ ortogonal a estes dois últimos.

17. (Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.) Dada a base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ ache uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que $\vec{e}_1 // \vec{f}_1$ e $\vec{e}_2$ seja combinação linear de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$.

Aplicação $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

Sugestão: $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$; use o Exercício Resolvido nº 7 para escrever diretamente $\vec{e}_2$; use o Exercício Resolvido nº 8 para escrever diretamente $\vec{e}_3$.

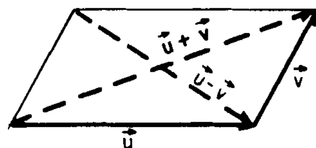
18. Prove que $(\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}) \perp (\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v})$

19. Prove que se $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ e $\vec{v} \perp (\vec{w} - \vec{u})$, então $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

20. Mostre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$; e que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

21. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm mesma medida se e somente se o paralelogramo é um retângulo.

Sugestão: Traduza para $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.



22. Mostre que as diagonais de um losango:

a) são perpendiculares e reciprocamente, se um paralelogramo tem as diagonais perpendiculares, ele é um losango;

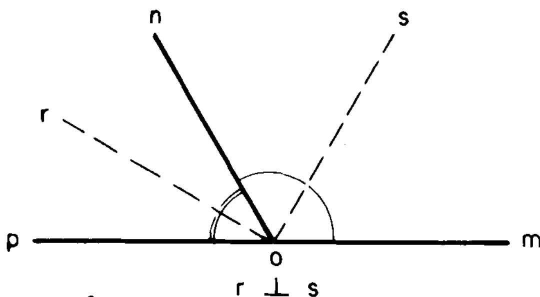
b) bissectam os ângulos internos.

23. a) Mostre que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é perpendicular à base e é bissetriz do ângulo do vértice.

b) Mostre que se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes (isto é, têm a mesma medida).

c) (Recíproca de (b)) Mostre que se um triângulo tem dois ângulos congruentes, ele é isósceles.

24. Mostre que as bissetrizes de ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.

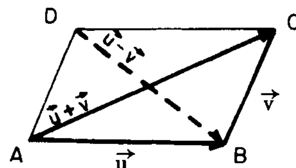


Sugestão: Exercício 3

25. Mostre que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados.

Sugestão: Mostre que

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$



26. Mostre que

a) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (propriedade triangular)

b) $|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$

c) $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ são lineares dependentes

Sugestão

a) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$. Use $\vec{x}\cdot\vec{y} \leqslant |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

(Desigualdade de Schwarz.)

b) A desigualdade equivale a

$-\|\vec{x}-\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$.

Escreva $\vec{x} = (\vec{x}-\vec{y}) + \vec{y}$. Use a parte **a**.

27. Sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} = \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}\,\vec{u} + \dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}\,\vec{v}$, prove que $\vec{w}$ forma ângulos congruentes com $\vec{u}$ e com $\vec{v}$.

28. a) Prove a relação de Euler

$\vec{BA}\cdot\vec{DC} + \vec{AC}\cdot\vec{DB} + \vec{CB}\cdot\vec{DA} = 0$

b) Prove que se um tetraedro tem dois pares de arestas opostas ortogonais, as duas arestas restantes são também ortogonais.

c) Prove que as alturas de um triângulo passam por um mesmo ponto (este exercício já foi proposto no Capítulo 4; usando a relação de Euler, sua resolução fica muito simplificada).

29. O objetivo deste exercício é resolver a equação

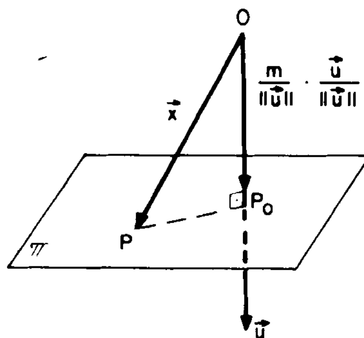
$$\vec{x} \cdot \vec{u} = m \qquad (\vec{u} \neq \vec{0})^{(*)} \qquad (\alpha)$$

Vamos tentar visualizar geometricamente o conjunto-solução V da mesma. Como $\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{x} = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}$ (Exercício Resolvido nº 7), temos que V é o conjunto dos $\vec{x}$ cuja projeção sobre $\vec{u}$ é $\dfrac{m}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}$.

Esta observação já nos dá uma idéia de V.

Tomando $O \in E^3$, e sendo

$P_0 = O + \dfrac{m}{\|\vec{u}\|}\,\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, vemos que se P pertence ao plano π que contém P_0 e é ortogonal a $\vec{u}$, então $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ é solução, pois a projeção de $\vec{x}$ na direção de $\vec{u}$ é $\dfrac{m}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}$ e é fácil se convencer que todo $\vec{x}$ solução de (α) se obtém assim.



Então

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{P_0P} + \frac{m}{\|\vec{u}\|}\,\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

(*) Caso $\vec{u} = \vec{0}$, a equação não tem solução se $m \neq 0$, e qualquer $x \in V^3$ é solução se $m = 0$.

Tomando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores linearmente independentes e paralelos a π, podemos escrever

$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, logo $$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \frac{m}{\|u\|^2}\vec{u} \qquad (\gamma)$$

Quando λ e μ percorrem $\mathbb{R}$, $\vec{x}$ percorre V, o conjunto solução de (α).

Para justificar rigorosamente as afirmações, indicamos os passos seguintes, deixados como exercício.

Considere a equação homogênea

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \qquad (\vec{u} \neq \vec{0}) \qquad (\beta)$$

Vamos fixar uma solução particular de (α), que denotaremos por $\vec{x}_0$.

a) Mostre que o conjunto-solução de (β) é o conjunto dos vetores da forma $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, onde λ e μ percorrem $\mathbb{R}$, e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dois vetores fixados, linearmente independentes e ortogonais a $\vec{u}$.

b) Mostre que se $\vec{x}$ é solução de (α) então $\vec{x} - \vec{x}_0$ é solução de (β) (isto é, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$) e que todo $\vec{x}$ dessa forma é solução de (α).

c) Mostre que $\vec{x}_0 = \dfrac{m\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ é solução de (α).

d) Conclusão: de (a), (b), (c) concluímos que o conjunto-solução de (α) é formado pelos $\vec{x}$ dados por (γ), onde λ e μ percorrem $\mathbb{R}$.

30. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{u} \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = m \qquad (\vec{v} \neq \vec{0}) \end{cases}$$

31. Mostre que se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ são bases ortonormais, então a matriz M de mudança de base de E para F satisfaz $M \cdot M^t = M^t \cdot M = I$, onde I é a matriz identidade (matrizes com tal propriedade chamam-se matrizes ortogonais).

Sugestão: Sendo $\mathbf{M} = (a_{ij})$, use as relações

$$\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$$

para concluir que

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0$$

$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$$

e daí que $M^t \cdot M = I$

Observações (verifique-as!)

1. M é ortogonal $\Leftrightarrow$ $M^{-1} = M^t$

2. M é ortogonal $\Leftrightarrow$ o produto escalar de dois "vetores-coluna" (linha) é nulo se eles forem distintos e igual a 1 no outro caso.

3. Se M é ortogonal, então detM é 1 ou -1.

32. Reconheça as matrizes ortogonais:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \frac{6}{7} & 3 & 2 \\ \frac{2}{7} & 6 & 3 \\ \frac{3}{7} & -2 & 6 \end{bmatrix}$

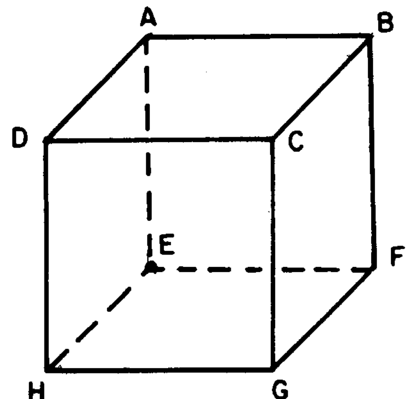
33. Ache as inversas das matrizes ortogonais do exercício anterior.

34. Mostre que uma matriz ortogonal 2 x 2 deve ser de uma das formas

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Sugestão $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det M = \pm 1$. Iguale: $M^{-1} = M^t$.

35. Na figura ao lado, temos um cubo de aresta unitária. Considere os vetores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DH}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{GC}$.



a) Explique por que $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal.

b) Calcule as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ em relação à base E. Calcule $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$.

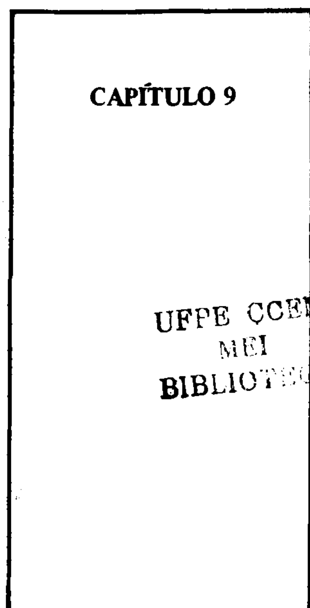
c) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base ortonormal, sendo $\vec{f}_1 = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{f}_2 = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e $\vec{f}_3 = \vec{w}$.

d) Obtenha a matriz M de mudança da base E para a base F e a matriz N de mudança de F para E (veja o Exercício 31).

e) Calcule as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HB}$ em relação à base E e em relação à base F (veja o Exercício Resolvido nº 5).

36. Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Sendo $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$ e $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$, prove que $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal e calcule as coordenadas do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ em relação à base F (veja o Exercício Resolvido nº 5).





ORIENTAÇÃO DE V^3

- **Considerações intuitivas**

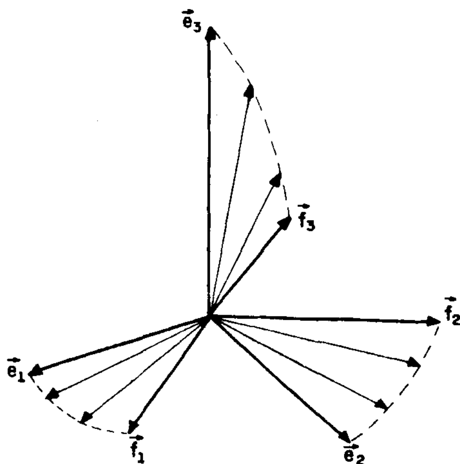
Provavelmente, você vai achar muito estranho o objetivo deste capítulo: queremos "orientar o espaço". À primeira vista, não há nada de intuitivo nessa idéia, mas antes que você pense que se trata de "loucura de matemáticos", vamos fazer algumas analogias.

"Orientar uma reta r" você sabe bem o que é. Trata-se de escolher um sentido para r. Como dizer isto de modo preciso? Ora, fixando um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ paralelo a r, podemos considerar a classe $\boldsymbol{A}$ de todos os vetores que têm mesmo sentido que $\vec{v}$, e a classe $\boldsymbol{B}$ dos que têm sentido contrário (isso foi definido no Capítulo 1). Indicando por V^1 o conjunto dos vetores paralelos a r, vemos que $V^1 - \{\vec{0}\} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \phi$. Qualquer vetor de $\boldsymbol{A}$ dá à reta r a mesma orientação, e qualquer vetor de $\boldsymbol{B}$ dá à reta r a mesma orientação, contrária à anterior. Podemos então dizer que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são as duas possíveis orientações de r (ou de V^1). Escolhida uma delas, r (ou V^1) está orientada. Repare que, na prática, tudo consiste em escolher um vetor LI (portanto não-nulo) paralelo a r, e classificar os vetores não-nulos paralelos a r pelo critério do "sentido".

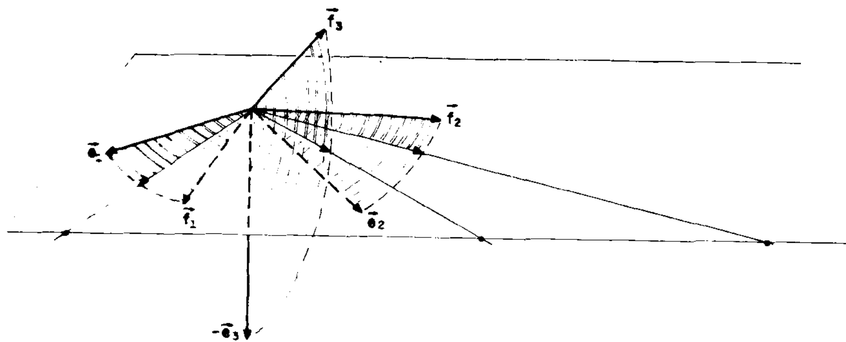
E se quisermos orientar um plano π? Intuitivamente falando, trata-se de escolher um sentido para as rotações desse plano: horário ou anti-horário (como você sabe isto é muito útil em Trigonometria, por exemplo). Vamos dizer isso usando uma linguagem semelhante à utilizada no caso da reta. Inicialmente adotamos um critério de comparação entre pares ordenados LI de vetores paralelos a π: diremos que $(\vec{u}, \vec{v})$ é um par horário se a rotação que $\vec{u}$ deve realizar para se superpor a $\vec{v}$ pelo caminho mais curto (é claro que estamos falando dos representantes) for no sentido dos ponteiros do relógio; caso contrário, dizemos que o par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é anti-horário.

Consideramos, então, a classe **A** dos pares horários e a classe **B** dos anti-horários. Cada par ordenado LI de vetores paralelos a π pertence a uma só dessas classes. Dizemos então que **A** e **B** são as duas possíveis orientações de π (ou do conjunto V^2 dos vetores paralelos a π). Escolhida uma delas, π (ou V^2) está orientado. Observe que na prática tudo consiste em escolher um par ordenado LI de vetores paralelos a π e comparar os demais com ele pelo critério descrito acima. Observe ainda que se dois pares são da mesma orientação, um deles pode ser deformado continuamente até se superpor ao outro, respeitada a ordem dos vetores, sem que se perca a independência linear em nenhuma etapa do processo.

Cremos que agora a idéia de orientar o espaço já lhe parecerá menos esdrúxula. Intuitivamente falando, as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ têm mesma orientação se uma delas pode ser deformada continuamente na outra, sendo que durante a deformação os três vetores nunca deixam de formar base. Veja a figura.



Ela ilustra o fato de que E e F têm mesma orientação. A figura seguinte, por outro lado, mostra que $E_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3)$ não tem mesma orientação que F, pois você consegue deformar continuamente $E_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3)$ em F, mas vai haver um instante da deformação em que os três vetores ficam linearmente dependentes.



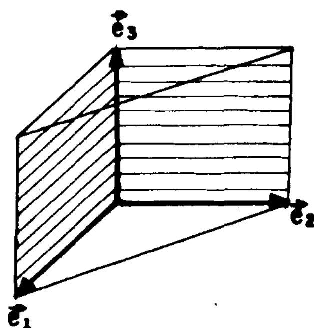
Outro critério que se usa com freqüência, na Física, para comparar duas bases quanto à orientação é classificá-las em dextrógiras (as que obedecem à "regra do saca-rolhas", ou à "regra da mão direita") e levógiras (as que desobedecem). Veja um livro de Física (*).

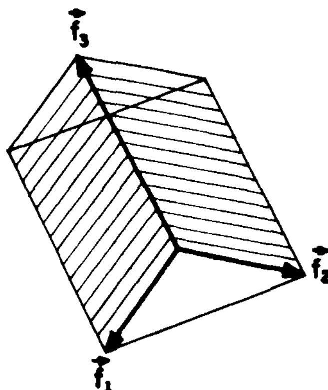
Como tudo isso envolve um forte apelo à intuição geométrica, surgem dificuldades na tentativa de formalização. É possível no entanto dar um tratamento rigoroso e provar que E e F têm mesma orientação $\Leftrightarrow$ a matriz de mudança de E para F tem determinante positivo.

Nessas condições é para nós mais cômodo usar esta caracterização como definição de bases de mesma orientação. A formulação matemática de deformação contínua nos levaria além do objetivo deste livro. Enviamos o leitor interessado ao Capítulo II, § 10, do livro *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, cujos autores são O. Schreier e E. Sperner.

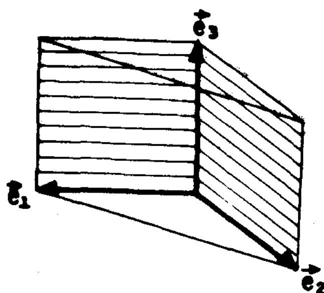
Confira agora a sua intuição do que sejam bases de mesma orientação nos casos:

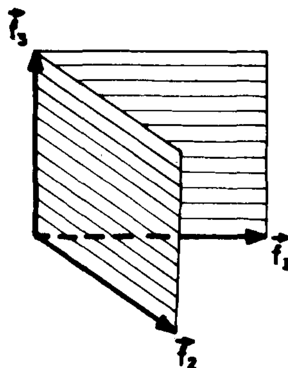
a)





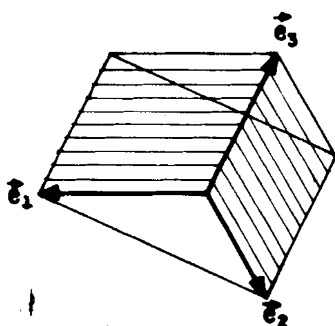
b)

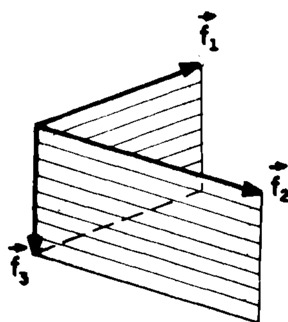




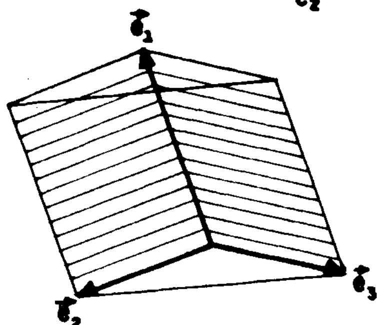
(*) Por exemplo *The Feynman Lectures on Physics*, de autoria de R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, Editora Addison-Wesley, 1966, p. 20-4, vol. I.

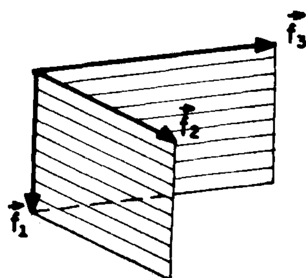
c)





d)





(Respostas: E e F têm mesma orientação nos casos a) e c), e orientação oposta em b) e d)).

Definição 1

Sejam E, F bases de V^3. Dizemos que *E tem mesma orientação que F* se a matriz M de mudança de E para F tem determinante positivo. Nesse caso, como $F \xrightarrow{M^{-1}} E$, e $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det M}$, resulta que F tem mesma orientação que E. Dizemos então que E e F têm mesma orientação. Quando duas bases não têm mesma orientação elas se dizem de orientação oposta. Com isto, as bases de V^3 ficam divididas em duas classes, que podem ser dadas assim: escolha uma base E de V^3. Considere todas as bases cujas matrizes de mudança para E tenham determinante positivo. Essas bases formam uma das classes, digamos $\mathbf{A}$. As outras bases, isto é, aquelas cujas matrizes de mudança para E têm determinante negativo, constituem a outra classe, B.

Observação Pode-se provar que (faremos parte disso adiante).

1. Duas bases quaisquer de $\mathbf{A}$ têm mesma orientação, o mesmo sucedendo com duas bases quaisquer de $\boldsymbol{B}$

2. Uma base qualquer de $\mathcal{A}$ e uma base qualquer de $\mathcal{B}$ têm orientação contrária.

3. As classes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ não dependem da escolha da base inicial E.

Definição 2

Qualquer uma das classes $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, se chama uma *orientação* de V^3. Escolhida uma delas, dizemos que V^3 *está orientado* e nesse caso as bases da classe escolhida são chamadas *positivas* (e as da outra, *negativas).*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Prove que se E tem mesma orientação que F, e F tem mesma orientação que G, então E tem mesma orientação que G. (Propriedade transitiva)

Resolução

Sendo $E \xrightarrow{M} F$, $F \xrightarrow{N} G$, sabemos que $E \xrightarrow{MN} G$. Por hipótese,

$$\det M > 0 \qquad \text{(E e F têm mesma orientação)}$$

$$\det N > 0 \qquad \text{(F e G têm mesma orientação)}$$

logo $\det(MN) = \det M \,.\, \det N > 0$, isto é, E e G têm mesma orientação.

2. Prove a afirmação da Observação 1.

Resolução

Tomemos duas bases F e G de $\mathcal{A}$. Então, por construção de $\mathcal{A}$, sendo $F \xrightarrow{M} E$ e $G \xrightarrow{N} E$, temos que $\det M > 0$ e $\det N > 0$. Mas sabemos que $F \xrightarrow{MN^{-1}} G$. Então,

$$\det(MN^{-1}) = (\det M)(\det N^{-1}) = \frac{\det M}{\det N} > 0$$

Logo F e G têm mesma orientação.

Quanto à 2ª parte: tomemos H e J, bases de B. Sendo $H \xrightarrow{R} E$ e $J \xrightarrow{T} E$, temos que

det R < 0 e det T < 0, pela própria definição de $\mathcal{B}$. Então, por ser $H \xrightarrow{RT^{-1}} J$ e

$\det RT^{-1} = \det R \cdot \det T^{-1} = \dfrac{\det R}{\det T} > 0$, concluímos que H e J têm mesma orientação.

3. Mostre que as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ têm orientação oposta.

Resolução

Sendo $E \xrightarrow{M} F$, temos

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $\det M = -1 < 0$, e a afirmação segue.

4. Mostre que se as bases $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ têm mesma orientação, e $\vec{r} \parallel \vec{w}$, então $\vec{r} = \lambda \vec{w}$, com $\lambda > 0$ (isto é, $\vec{r}$ e $\vec{w}$ têm mesmo sentido). Em particular, se $\|\vec{r}\| = \|\vec{w}\|$, resulta $\lambda = 1$ e portanto $\vec{r} = \vec{w}$.

Resolução

Sendo $E \xrightarrow{M} F$, temos, pondo $\vec{r} = \lambda \vec{w}$, que

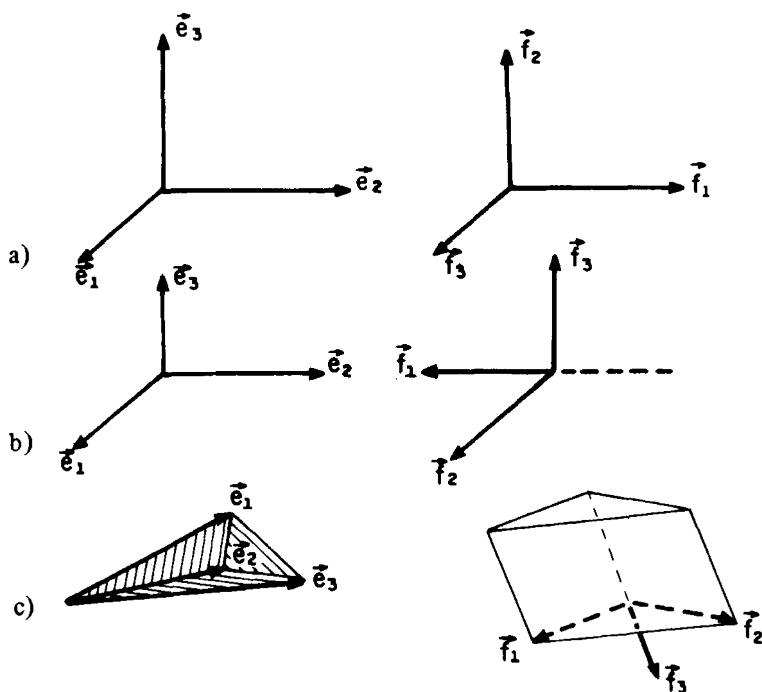
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Por hipótese, det M > 0, logo det M = $\lambda > 0$. Caso $\|\vec{r}\| = \|\vec{w}\|$, de $\|\vec{r}\| = \|\lambda\vec{w}\| = |\lambda|\,\|\vec{w}\| = \lambda\,\|\vec{w}\|$ resulta $\lambda = 1$.

Faça uma figura para entender geometricamente este resultado.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verifique se as bases têm mesma orientação, ou orientação oposta nos casos



2. Idem para $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ nos casos

a) $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$
$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
$\vec{f}_3 = \vec{e}_2$

b) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$

c) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$
$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

3. Prove que "ter mesma orientação" é uma relação de equivalência, isto é:

a) E tem mesma orientação que E (propriedade reflexiva);

b) se E tem mesma orientação que F, então F tem mesma orientação que E (propriedade simétrica);

c) se E tem mesma orientação que F e F tem mesma orientação que G, então E tem mesma orientação que G (propriedade transitiva).

4. Prove a afirmação feita na Observação 2.

5. Prove a afirmação feita na Observação 3.

Sugestão Sejam $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{B}'$ as classes obtidas pela escolha de E'.

1º **caso**: Suponha E e E' de mesma orientação.

Então prove que $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

2º **caso**: Suponha E e E' de orientação oposta.

Então prove que $\mathbf{A}' = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{A}$.

6. Dada a base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, considere as classes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como no texto. Decida se $F \in \mathbf{A}$ ou $F \in \mathbf{B}$ sendo $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, nos casos

a) $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
$\vec{f}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$

b) $\vec{e}_1 = -2\vec{f}_1$
$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \vec{f}_3$
$\vec{e}_3 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$

7. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base positiva e $F = (\alpha\vec{e}_1, \beta\vec{e}_2, \gamma\vec{e}_3)$ também, qual a relação entre os números α, β, γ?

8. Mostre que, sendo $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ bases de orientação oposta, e $\vec{r} // \vec{w}$, então $\vec{r} = \lambda \vec{w}$ com $\lambda < 0$ (isto é, $\vec{r}$ e $\vec{w}$ têm sentido contrário). Em particular, se $\vec{r}$ e $\vec{w}$ têm normas iguais, resulta $\lambda = -1$ e portanto $\vec{r} = -\vec{w}$.

CAPÍTULO 10

PRODUTO VETORIAL

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vamos definir um vetor a partir deles, chamado de produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o qual indicaremos por $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Para isso, deveremos orientar V^3, como se verá.

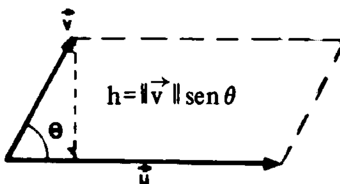
Definição

Fixemos uma orientação de V^3. Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^3 definimos $\vec{u} \wedge \vec{v}$, *produto vetorial de* $\vec{u}$ e $\vec{v}$, da seguinte maneira:

(i) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

(ii) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente independentes, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ será o vetor com as seguintes características:



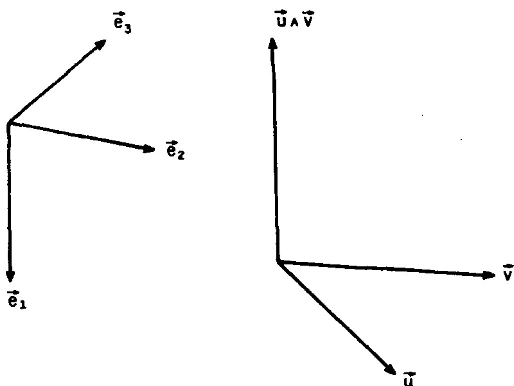
a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é igual à área de um paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \text{ sen } \theta$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

c) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva de V^3. (Veja a figura.)



Atenção: JAMAIS cometa o erro de escrever
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

Isso não faz sentido, uma vez que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um *vetor* e o 2º membro da igualdade acima é um *número real*. O número $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$ é, isto sim, a *norma* do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Como, porém, vale para o produto escalar a igualdade
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$

(o produto escalar *é* um número real!) você será tentado muitas vezes a cometer aquele erro. CUIDADO!

Observação

Da própria definição resulta que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Em particular, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Proposição

Seja $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Então, sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ relativamente a essa base, tem-se

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

onde o determinante formal deve ser interpretado como sendo

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Demonstração

Seja

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \qquad (1)$$

(i) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes, então ou $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$; logo,

$$\text{ou} \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases} \qquad \text{ou} \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda y_1 \\ z_2 = \lambda z_1 \end{cases}$$

logo todos os determinantes em (1) são nulos.

Daí

$$\vec{w} = \vec{0} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

(ii) Vamos supor agora $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente independentes.

a) $$\|\vec{w}\|^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \qquad (2)$$

Agora,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 =$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2$$

Um cálculo simples nos mostra que esta expressão é igual a (2), logo

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2,$$

ou seja

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \quad (\neq 0) \qquad (3)$$

b) $\vec{w} \cdot \vec{u} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_1 =$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Analogamente, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.

Assim, $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$, donde

$$\vec{w} \,//\, \vec{u} \wedge \vec{v} \qquad (4)$$

c) Vamos mostrar que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base positiva, e portanto, pelo Exercício Resolvido nº 4 do capítulo anterior,

$$\vec{w} \text{ e } \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ têm mesmo sentido} \qquad (5)$$

De (3), (4), (5) seguirá que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, concluindo a demonstração.

A matriz

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ y_1 & y_2 & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \\ z_1 & z_2 & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ para $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (verifique!). Desenvolvendo det M pela terceira coluna vem

$$\det M = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \|\vec{w}\|^2 > 0.$$

Logo a base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tem mesma orientação que a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sendo portanto positiva.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ (referidos a uma base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

Resolução

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)\vec{i} + ((-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2)\vec{j} + (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2)\vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} = (1, -5, 3)$$

2. Prove que se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal positiva, então o diagrama ao lado nos dá todos os produtos vetoriais entre os elementos da base de acordo com a regra: o produto vetorial de dois elementos é o outro ou seu oposto, conforme se siga ou não a flecha. Assim



$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ $\quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ $\quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ $\quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ $\quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

Resolução

Por exemplo:

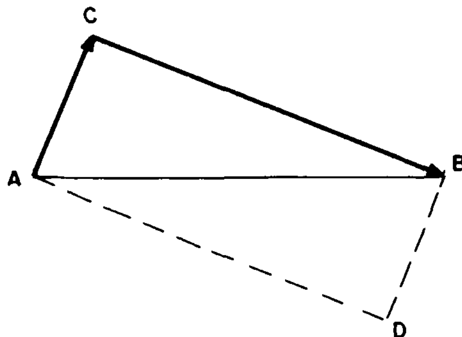
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 1.\vec{k} = \vec{k}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.\vec{i} - 1.\vec{j} + 0.\vec{k} = -\vec{j} \quad \text{etc.}$$

3. Calcule a área do triângulo ABC, sabendo que, relativamente a uma base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 3)$

$\overrightarrow{CB} = (-1, 1, 0)$



Resolução

Sabemos que a área procurada é metade da área do paralelogramo ADBC (ver figura), a saber $\frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} \|$. Calculemos

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -3, 2)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} \| = \frac{1}{2} \| (-3, -3, 2) \| = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 9 + 4} = \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

4. Mostre que $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Resolução

Basta calcular $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{v} \wedge \vec{u}$ conforme a Proposição 1.

Vejamos agora propriedades do produto vetorial.

Proposição 2 Para quaisquer $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ de V^3 e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

1. $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2$

   $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}$

2. $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

3. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (*)

Demonstração

São todas decorrentes facilmente da fórmula dada na proposição anterior. A título de exemplo, mostraremos que

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2 .$$

Tomada uma base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, escrevamos

$$\vec{u} = (x, y, z)$$

$$\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Então

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z_1 + z_2 & x_1 + x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right) \vec{i} + \left(\begin{vmatrix} z & x \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \right) \vec{j} +$$

(*) Já provado no Exercício Resolvido nº 4.

$$+ \left(\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \vec{k} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y & z \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{u} \wedge \vec{v_1} + \vec{u} \wedge \vec{v_2}$$

Atenção Na expressão $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w}$, cuidado para não errar ao pôr $\vec{v}$ em evidência, escrevendo $\vec{v} \wedge (\vec{u} + \vec{w})$. O correto é:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{w} \wedge \vec{v} = (\vec{u} - \vec{w}) \wedge \vec{v}$$

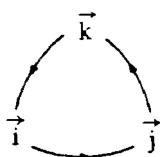
ou então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge (-\vec{u} + \vec{w}).$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS (Continuação)

5. Mostre que o produto vetorial não é associativo, calculando $(\vec{j} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i}$ e $\vec{j} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{i})$.

Resolução:



$$(\vec{j} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i} = \vec{0} \wedge \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{i}) = \vec{j} \wedge (-\vec{k}) = -\vec{i}$$

logo

$$(\vec{j} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i} \neq \vec{j} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{i}).$$

6. Vale o cancelamento $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$?

Resolução

Cuidado, aqui é fácil errar. A resposta é não. Eis um procedimento correto:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} - \vec{w} \text{ são LD.}$$

Para obter um contra-exemplo, tome $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (6, 0, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, 0)$. Então $\vec{v} \neq \vec{w}$, mas $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} = \vec{u} \wedge \vec{w}$.

7. Mostre que o produto vetorial de dois vetores muda de sentido ao se trocar a orientação de V^3. Mais precisamente, sendo ***A*** e ***B*** as orientações de V^3, e indicando por $\wedge$ e $\bar{\wedge}$ os produtos vetoriais relativamente a ***A*** e ***B***, respectivamente, então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{u} \,\bar{\wedge}\, \vec{v}$$

Resolução

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes, então a igualdade acima se verifica ($\vec{0} = -\vec{0}$).

Senão, temos que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{u} \,\bar{\wedge}\, \vec{v}$ têm mesmo módulo, e mesma direção, de acordo com a definição de produto vetorial. Então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \epsilon \vec{u} \,\bar{\wedge}\, \vec{v} \qquad (\alpha)$$

sendo $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$. Para decidir isto, observemos que pela definição de produto vetorial, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \in$ ***A***, e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \,\bar{\wedge}\, \vec{v}) \in$ ***B***. Então, o determinante da matriz M de mudança de base da primeira para a segunda base deve ser negativo. Mas

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \det M = \epsilon$$

e como deve ser $\det M < 0$, resulta $\epsilon < 0$ donde $\epsilon = -1$. Substituindo em (α) resulta a tese.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

É fixada uma base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{v} \wedge \vec{u}$ nos casos

   a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1)$.

   b) $\vec{u} = (7, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$.

   c) $\vec{u} = (1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 4)$.

   d) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 4)$.

2. Calcule o momento em relação ao ponto O da força $\vec{f} = (-1, 3, 4)$, aplicada ao ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 1)$ (este momento é $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}$).

3. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u} \wedge \frac{3}{4}\vec{v}\|$.

4. Sendo ABCD um tetraedro regular de lado unitário, calcule $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

5. Calcule a área do paralelogramo ABCD, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$

6. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3)$.

7. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

8. Dados $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$, ache uma base ortonormal positiva $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

   (i) $\vec{a} \,//\, \vec{u}$, $\vec{a}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$.

   (ii) $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e sua primeira coordenada é positiva.

9. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 9 \\ \vec{x} \wedge (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}$$

10. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$, e $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$.

11. Sabe-se que $\vec{x}$ é ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{x}$ e $(0, 1, 0)$, tem-se $\cos\theta > 0$. Ache $\vec{x}$.

12. Prove que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

13. Prove que

   a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$

   b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

14. Prove que $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{v} \wedge \vec{u})$

15. Prove que se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ então

   (a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$

   (b) $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = 3(\vec{u} \wedge \vec{v})$

16. Prove que $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}$

17. Prove que $(\vec{u} - \vec{t}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{t}) \wedge (\vec{w} - \vec{u}) + (\vec{w} - \vec{t}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u})$

18. Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{t}$ então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são linearmente dependentes. Prove isso.

19. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{w} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.

20. Prove que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.

21. Prove que a altura do Δ ABC relativa ao lado AB mede $h = \dfrac{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}{\| \overrightarrow{AB} \|}$

22. Calcule a distância do ponto C à reta r que passa por dois pontos distintos A e B.

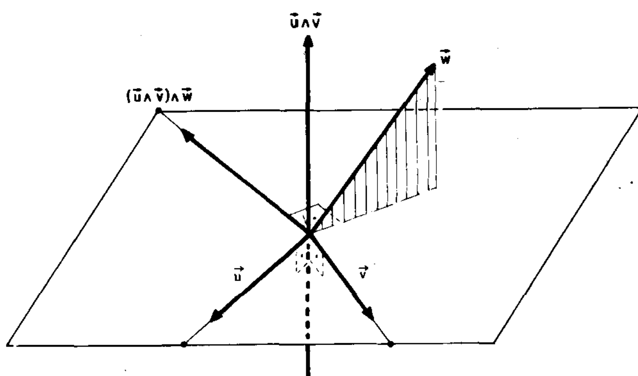
23. Exprima a distância entre duas arestas opostas AB e CD de um tetraedro ABCD em função de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}$.

CAPÍTULO 11

DUPLO PRODUTO VETORIAL

Queremos neste capítulo achar uma expressão para $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

Vamos supor inicialmente que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam linearmente independentes. Como $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \wedge \vec{v}$ então resulta que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ são paralelos a um mesmo plano, isto é, são linearmente dependentes (veja a figura). Logo, sendo $(\vec{u}, \vec{v})$ LI, existem λ e μ reais tais que

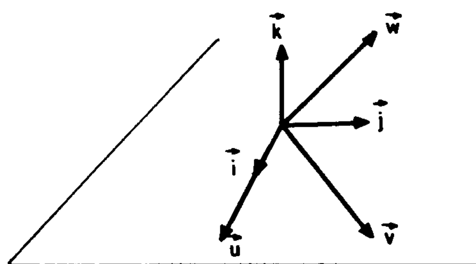


$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

(veja o Corolário 2 do Capítulo 5).

Para determinarmos λ e μ, escolhamos uma base conveniente. Seja $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base ortonormal positiva, com $\vec{i}$ paralelo a $\vec{u}$, $\vec{j}$ coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Então, podemos escrever



$$\begin{cases} \vec{u} = (x_1, 0, 0) \\ \vec{v} = (x_2, y_2, 0) \\ \vec{w} = (x_3, y_3, z_3) \end{cases} \qquad (2)$$

Daí

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x_1 y_2)$$

Portanto

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & x_1 y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (-x_1 y_2 y_3, x_1 y_2 x_3, 0)$$

Comparando com

$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda(x_1, 0, 0) + \mu(x_2, y_2, 0) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \mu y_2, 0)$ (conforme (1)) resulta:

$$\begin{cases} -x_1 y_2 y_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ x_1 y_2 x_3 = \mu y_2 \end{cases}$$

Mas $y_2 \neq 0$ (por quê?). Logo, a segunda equação fornece

$$\mu = x_1 x_3 \qquad (3)$$

Substituindo na primeira equação vem

$$-x_1 y_2 y_3 = \lambda x_1 + x_1 x_3 x_2$$

e daí por ser $x_1 \neq 0$ (por quê?) resulta

$$\lambda = -(y_2 y_3 + x_2 x_3) \qquad (4)$$

Observando (2) vemos que (3) e (4) ficam $\mu = \vec{u} \cdot \vec{w}$, $\lambda = -\vec{v} \cdot \vec{w}$. Substituindo em (1) resulta

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v}} \qquad (5)$$

Fica a seu cargo a demonstração de (5) no caso em que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD; lembre-se que nesse caso, $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta \vec{u}$.

Pode-se provar facilmente (exercício) que

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}} \qquad (6)$$

Observações

1. Podem-se memorizar estas duas fómulas lembrando:

   a) que o resultado é combinação linear dos vetores entre parênteses; coloque-os na ordem em que aparecem entre parênteses.

   $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\quad)\,\vec{u} \qquad (\quad)\,\vec{v}$

   $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\quad)\,\vec{v} \qquad (\quad)\,\vec{w}$

   b) o número que multiplica um deles é o produto escalar dos outros dois, a menos de sinal. No primeiro caso, os parênteses estão mais à esquerda, logo, o sinal $-$ é na primeira parcela:

   $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v}$

   No segundo caso, os parênteses estão mais à direita; logo, o sinal $-$ é na segunda parcela:

   $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$

2. Já sabemos que para definir produto vetorial há necessidade de escolher uma orientação de V^3. Ora, existem duas escolhas possíveis; na figura, optamos por adotar a orientação dextrógira (observe o sentido de $\vec{u} \wedge \vec{v}$), como usualmente se faz em Física.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Prove a identidade de Jacobi:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

Resolução:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v}$$

$$(\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\,\vec{u}$$

$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = -(\vec{w} \cdot \vec{u})\,\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\,\vec{w}$$

Somando membro a membro as três igualdades resulta a tese.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ diretamente, e depois usando as fórmulas desenvolvidas no texto deste capítulo, sendo $\vec{u} = (1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{v} = (6, -2, -4)$, $\vec{w} = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$, em relação a uma base ortonormal positiva.

2. Prove a fórmula $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$ usando a fórmula deduzida para $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

3. a) Suponha que $\vec{v} \perp \vec{w}$ e $\vec{v} \perp \vec{u}$. Então vale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

   b) Suponha agora que $\vec{v} \not\perp \vec{w}$, ou $\vec{v} \not\perp \vec{u}$. Então $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \Rightarrow \vec{u}$ e $\vec{w}$ linearmente dependentes.

   c) Prove que $(\vec{u}, \vec{w})$ LD $\Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

4. Mostre que

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -(\vec{v} \cdot \vec{w} \wedge \vec{t})\,\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w} \wedge \vec{t})\,\vec{v} = (\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{t})\,\vec{w} - (\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{t}$

5. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, prove que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}))) = \|\vec{u}\|^4\,\vec{v}$

6. Prove que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t})) = (\vec{v} \cdot \vec{t})\,\vec{u} \wedge \vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u} \wedge \vec{t} = (\vec{u} \cdot \vec{w} \wedge \vec{t})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w} \wedge \vec{t}$

7. O objetivo deste exercício é resolver a equação

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$$

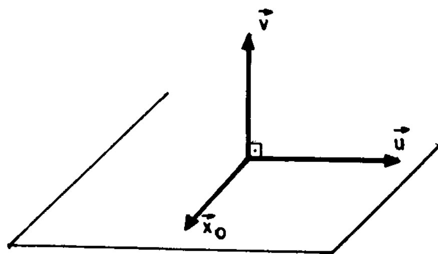
onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dados. Observemos que se $\vec{u} = \vec{0}$, então deve ser $\vec{v} = \vec{0}$ (senão não existe solução), e daí qualquer $\vec{x}$ é solução. Vamos supor, pois, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}, \quad \vec{u} \neq \vec{0} \qquad (\alpha)$$

a) Estudemos a equação homogênea $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$. Nesse caso $\vec{x} = \lambda\,\vec{u}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ dá o conjunto de todas as soluções.

b) Observemos que se $\vec{x}_0$ é uma solução de (α), então $\vec{x}$ também é se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\,\vec{u}$. De fato, se $\vec{x}$ é solução de $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$, como $\vec{x}_0 \wedge \vec{u} = \vec{v}$, resulta, por subtração, que $(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} - \vec{x}_0 = \lambda\,\vec{u}$. Reciprocamente, se $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\,\vec{u}$ é fácil verificar que $\vec{x}$ é solução de (α).

c) Vamos determinar uma solução $\vec{x}_0$ de (α). Para que (α) tenha solução é necessário que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pois $\vec{x} \wedge \vec{u} \perp \vec{u}$. Agora observe que se $\vec{x}_0 \wedge \vec{u} = \vec{v}$ multiplicando vetorialmente por $\vec{u}$, vem $(\vec{x}_0 \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ donde $-(\vec{u} \cdot \vec{u})\,\vec{x}_0 + (\vec{x}_0 \cdot \vec{u})\,\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u}$



Como estamos procurando uma solução particular $\vec{x}_0$, vamos supor $\vec{x}_0 \perp \vec{u}$, logo $\vec{x}_0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. Daí

$$\vec{x}_0 = -\frac{\vec{v} \wedge \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$$

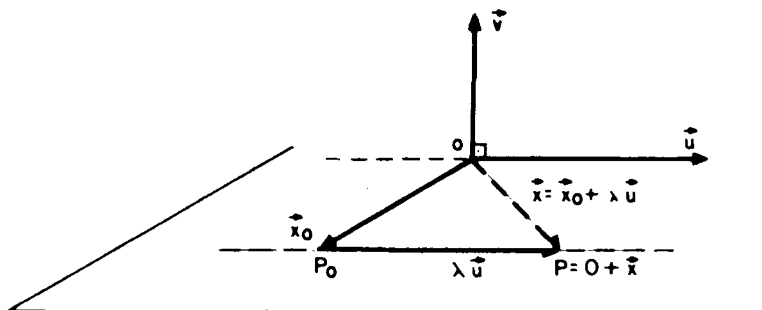
É fácil verificar que $\vec{x}_0$ assim dado é solução de (α).

d) Conclusão: $\vec{x}$ é solução de (α) se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} + \lambda \vec{u}$$

(suposto $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Geometricamente, fixando $O \in E^3$, e fazendo $P = O + \vec{x}$, se $\vec{x}$ percorre o conjunto das soluções de (α), P percorre a reta r, paralela a $\vec{u}$, e que passa por $P_0 = O + \vec{x}_0$.



8. **Resolva o sistema**

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v} \\ \vec{x} \cdot \vec{w} = m \end{cases}$$

utilizando o exercício anterior. Suponha $\vec{u} \cdot v = 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{w} \neq 0$.

9. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 2 \end{cases}$$

utilizando o exercício anterior, e depois utilizando coordenadas. A base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é ortonormal positiva.

10. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot \vec{u} = 1 \end{cases} \qquad (\vec{u} \neq \vec{0})$$

11. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v} \\ \vec{x} \cdot \vec{u} = m \end{cases} \qquad (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0,\ \vec{u} \neq \vec{0})$$

12. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{u} \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{v} \end{cases} \qquad (\vec{v} \neq \vec{0},\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0})$$

13. Ache $\vec{x}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = m \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = n \end{cases} \qquad ((\vec{u}, \vec{v})\ \text{LI})$$

Sugestão Considere $m\vec{v} - n\vec{u}$ para obter um duplo produto vetorial.

14. Ache $\vec{x}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = m \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = n \\ \vec{x} \cdot \vec{w} = p \end{cases} \qquad ((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\ \text{LI})$$

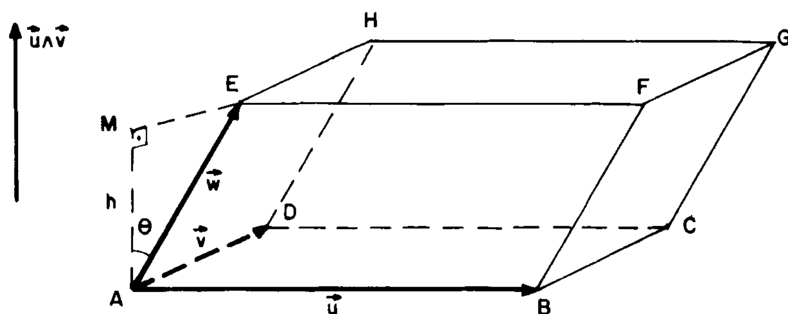
15. Seja ABC um triângulo de altura AH. Prove que $\overrightarrow{AH}$ é paralelo a $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{BC}$.

Sugestão Calcule $[(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{BC}] \wedge \overrightarrow{AH}$

CAPÍTULO 12

PRODUTO MISTO

Suponha que queiramos achar o volume V de um paralelepípedo como o da figura:



Sabemos que este volume é igual ao produto da área de uma base pela altura correspondente. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, θ a medida do ângulo entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$, h a altura relativa à base ABCD, e S a área da base ABCD, temos

$$V = S\,h = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\,h \overset{(*)}{=} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,|\cos\theta|$$

(*) $h = \|\vec{w}\|\,|\cos\theta|$ resulta da observação de que o triângulo AME é retângulo em M. O módulo em $|\cos\theta|$ é necessário, pois poderia ser $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$.

ou seja

$$V = |\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}|$$

Definição 1 Chama-se *produto misto dos vetores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ao número

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Observações

1. Não há necessidade de parênteses na expressão $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$, pois a ÚNICA forma de entendê-la é como o produto escalar de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (vetor) por $\vec{w}$ (vetor);não faz sentido pensar em produto vetorial de $\vec{u}$ (vetor) por $\vec{v} \cdot \vec{w}$ (número real). Mas, se você quiser colocar parênteses, deve ser assim: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

2. Do mesmo modo que no capítulo anterior foi necessário, na Definição 1, escolher uma orientação de V^3. Na figura anterior foi adotada a orientação dextrógira.

Proposição 1 Sendo $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma *base ortonormal positiva* relativamente à qual $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\therefore \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

onde a última igualdade se baseia no desenvolvimento do determinante pela terceira linha.

Corolário 1 Se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal positiva, e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base qualquer, então o determinante da matriz de mudança da primeira base para a segunda é $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Demonstração Basta observar que, pondo

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$
$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$
$$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3) = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k},$$

a referida matriz é

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

e daí

$$\det M = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}],$$

onde a penúltima igualdade traduz uma conhecida propriedade dos determinantes, e a última vale pela proposição anterior.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule o volume V do paralelepípedo mostrado na figura anterior, sendo dados, relativamente a uma base ortonormal positiva, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{BE} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$.

Resolução

Com a notação da figura, temos

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) + (1, 0, 1) = (2, 1, 2)$.

Então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

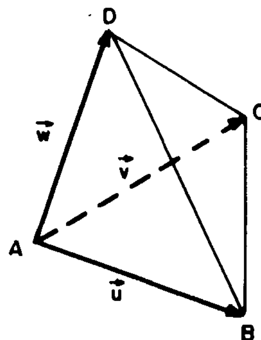
donde $V = |-3| = 3$.

2. Calcule o volume do tetraedro A B C D, conhecendo

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, z_2)$

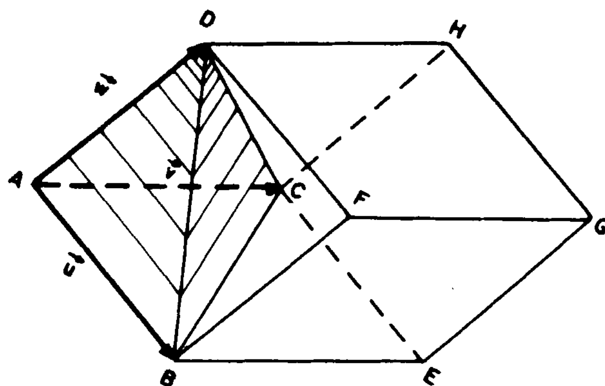
$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (x_3, y_3, z_3)$,



relativamente a uma base ortonormal positiva.

Resolução

Sabe-se da Geometria, que o volume em questão é um sexto do volume do paralelepípedo A B E C D F G H mostrado na figura:



Então, por ser

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

resulta que o volume procurado é $\frac{1}{6}$ do valor absoluto desse determinante.

Proposição 2 O produto misto:

1. é trilinear, isto é,

$$[\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$

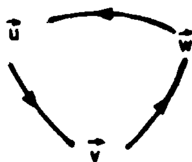
$$[\vec{u}, \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$$

2. é alternado, isto é, permutando dois vetores entre si, ele muda de sinal:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

Observação A propriedade 2 acima fica fácil de memorizar observando-se o diagrama ao lado. Se você fizer o produto misto seguindo as flechas, obterá os colchetes com sinal + . Se o fizer em sentido contrário ao das flechas, obterá os colchetes com sinal − . E qualquer produto "num mesmo sentido" é o oposto do produto "em sentido contrário". Por exemplo, $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$.



Demonstração

- $[\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = (\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = (\alpha \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \beta \vec{u}_2 \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} =$

  $= \alpha \vec{u}_1 \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + \beta \vec{u}_2 \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \alpha [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

- Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, relativamente a uma base ortonormal positiva, a Proposição 1 nos dá

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$$

e assim por diante.

Deixamos como exercício as restantes partes a demonstrar.

Corolário 2

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}}$$

(isto é, $\wedge$ e $\cdot$ podem ser permutados sem alterar o resultado).

Demonstração

Basta lembrar que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$$

e usar a parte 2 da Proposição 2:

$$[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Proposição 3

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente dependentes.

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ não se altera se a um fator se adiciona uma combinação linear dos outros dois (por exemplo $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{w}, \vec{w}]$).

Demonstração

Com a notação da Proposição 1,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

e vale 0 $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente dependentes, como já sabemos.

Quanto à outra parte, basta lembrar que o determinante acima não se altera se a uma linha se adiciona uma combinação linear das outras duas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS (Continuação)

3. Prove que $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}] = 2\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Resolução

Existem várias maneiras de resolver o exercício. Uma delas é tomar uma base e aplicar a fórmula da Proposição 1. Aí é só usar propriedades dos determinantes. Uma outra maneira é usar sucessivamente a parte 1 da Proposição 2.

$$[\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}] + [\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}] =$$

$$= \underbrace{[\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}]}_{=0} + [\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}] + \underbrace{[\vec{v}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{w}]}_{=0} + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{w}] =$$

$$= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \underbrace{[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}]}_{=0} + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] + \underbrace{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}]}_{=0} =$$

$$= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

4. Prove que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{t}) = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{w} & \vec{u}\cdot\vec{t} \\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{v}\cdot\vec{t} \end{vmatrix}$

Resolução

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{t}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = \vec{u} \cdot ((\vec{v}\cdot\vec{t})\vec{w} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{t}) =$$

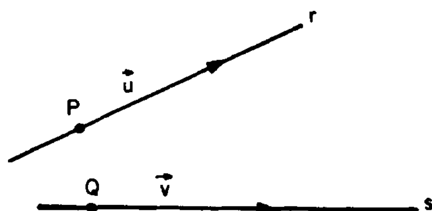
$$= (\vec{v}\cdot\vec{t})(\vec{u}\cdot\vec{w}) - (\vec{v}\cdot\vec{w})(\vec{u}\cdot\vec{t}) = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{w} & \vec{u}\cdot\vec{t} \\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{v}\cdot\vec{t} \end{vmatrix}$$

Na primeira igualdade usamos a propriedade $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \overset{(*)}{=} \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$, e na segunda, a expressão obtida no Capítulo 11.

5. Sejam r e s retas, $\vec{u} \neq \vec{0}$ paralelo a r, $\vec{v} \neq \vec{0}$ paralelo a s. Sejam $P \in r$, $Q \in s$.

(*) Veja o Corolário 2.

Então r e s são coplanares se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{QP}] = 0$. Prove isto.



Resolução

Isto é imediato, pois r e s são coplanares se e somente se $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{QP}$ são paralelos a um mesmo plano, isto é, linearmente dependentes. E isto ocorre, pela Proposição 3, se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{QP}] = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

É fixada uma base ortonormal positiva.

1. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sendo $\vec{u} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

2. Calcule o volume de um paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u} = (2, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (-2, -1, -1)$.

3. Calcule o volume do tetraedro ABCD dados $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$.

4. Verifique:

$$[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$$

$$\lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}].$$

5. Prove: $[\vec{u} + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}, \vec{v} + \gamma \vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

6. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, e que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base negativa, sendo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dois a dois ortogonais.

7. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 4$, e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base positiva, ache $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

8. Prove que

a) $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

b) A igualdade ocorrerá se e somente se algum dos vetores for nulo, ou, sendo todos não-nulos, forem dois a dois ortogonais.

9. Prove que se $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente dependentes.

10. Prove:

a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]^2$

b) Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base, então $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u})$ é base positiva.

11. Prove que a altura do tetraedro ABCD relativa à base ABC é

$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

Sugestão Volume $= \frac{1}{3}$ (área Δ ABC) h.

12. Ache a distância de um ponto D a um plano π que passa pelos pontos não-alinhados A, B, C, conhecendo $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

13. a) Prove que se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base, e $\vec{x} \in V^3$, então

$$\vec{x} = \frac{[\vec{x}, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}\vec{e}_1 + \frac{[\vec{x}, \vec{e}_3, \vec{e}_1]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}\vec{e}_2 + \frac{[\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}\vec{e}_3$$

b) Aplique isto no caso $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (0, 1, 0)$, $\vec{x} = (4, 3, 3)$.

14. Prove que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{x} & \vec{u}\cdot\vec{y} & \vec{u}\cdot\vec{z} \\ \vec{v}\cdot\vec{x} & \vec{v}\cdot\vec{y} & \vec{v}\cdot\vec{z} \\ \vec{w}\cdot\vec{x} & \vec{w}\cdot\vec{y} & \vec{w}\cdot\vec{z} \end{vmatrix}$$

Sugestão Se MN = P, então det M . det N = det P:

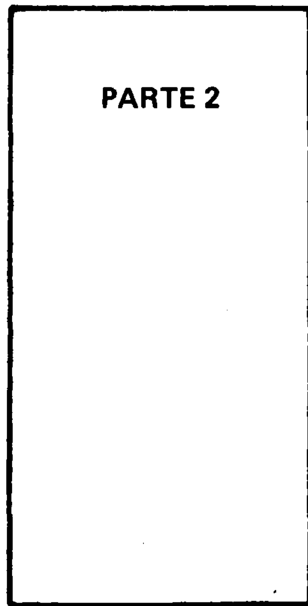
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 & * & * \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

15. Calcule o volume do tetraedro OABC, sabendo que OA, OB, OC medem respectivamente 2, 3, 4 e que $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$ medem respectivamente 30, 45 e 60 graus.

Sugestão Use o resultado do Exercício 14.

16. Prove analiticamente a afirmação feita na resolução do Exercício Resolvido 2.





PARTE 2

GEOMETRIA ANALÍTICA

CAPÍTULO 13

SISTEMA DE COORDENADAS

Para localizar um ponto P no espaço lançaremos mão da noção de sistema de coordenadas, cuja definição é a seguinte.

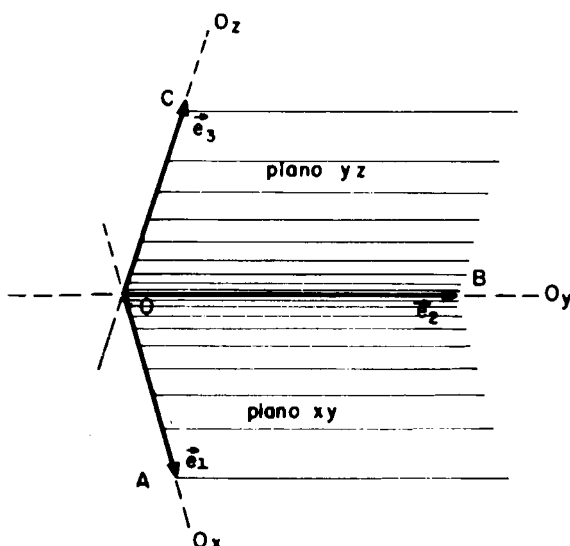
Definição

- Sejam O um ponto de E^3 e $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3. Ao par (O, B), que por abuso de notação se indica também por $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ chama-se *sistema de coordenadas em* E^3.
- O ponto O se diz *origem* do sistema.
- Sejam $A = O + \vec{e}_1$, $B = O + \vec{e}_2$, $C = O + \vec{e}_3$. As retas OA, OB, OC(*) são chamadas *eixos coordenados*, respectivamente *eixo dos x, eixo dos y, eixo dos z,* ou ainda *eixo das abscissas, eixo das ordenadas, eixo das cotas*; são indicadas respectivamente por Ox, Oy, Oz. Os planos determinados por O, A, B, por O, A, C, e por O, B, C são referidos como *planos coordenados*, e chamados respectivamente *plano Oxy, plano Oxz* e *plano Oyz.*
- O sistema se diz *ortogonal* se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base *ortonormal* (preste atenção nas palavras grifadas), que suporemos sempre positiva.
- Dado $P \in E^3$, podemos escrever

(*) Orientadas, respectivamente, por $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (1)$$

onde os números x, y, z estão univocamente determinados (pelo sistema e pelo ponto P).



Esses números são chamados de *coordenadas* de P relativamente ao sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (*). Portanto, dado P e fixado $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ determinamos uma tripla ordenada de números reais (x, y, z). Observe que, reciprocamente, dada a tripla ordenada de números reais (x, y, z), fica univocamente determinado um ponto $P \in E^3$ (insistimos: fixado $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$), o qual é dado por (1) (**). Portanto, existe uma bijeção de E^3 sobre $\mathbb{R}^3$, que é o conjunto das triplas ordenadas de números reais. Este fato nos permite identificar P com a tripla (x, y, z) e justifica a indicação P = (x, y, z) (***)

Observação

Não confunda coordenadas de um ponto com coordenadas de um vetor em situações como a seguinte, que surgem na Estática.

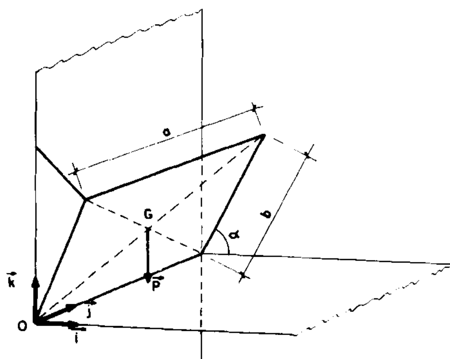
(*) Logo as coordenadas de P são coordenadas do vetor $\vec{OP}$ relativamente a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(**) Dada (x, y, z), seja $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Existe um (único) representante de $\vec{v}$ com origem O. P é a extremidade desse representante.

(***) Muitas pessoas evitam essa identificação escrevendo $P \equiv (x, y, z)$, ou então P (x, y, z).

A figura mostra uma placa homogênea de peso $\vec{p}$ mantida em equilíbrio, cujas dimensões *a* e *b* são conhecidas. Então as coordenadas do vetor $\vec{p}$ em relação à base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ são $(0, 0, -\|\vec{p}\|)$. Agora, as coordenadas do baricentro G da placa em relação ao sistema $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que por definição são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OG}$, são

$$\left(\frac{b}{2}\cos\alpha, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\operatorname{sen}\alpha\right).$$



A proposição seguinte mostra quão cômodo é trabalhar com coordenadas de pontos e de vetores.

Proposição Se $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{v} = (a, b, c)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então

(i) $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

(ii) $A + \lambda\vec{v} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)$ (*)

Demonstração

(i) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

(Recorde no Capítulo 6 como se opera com vetores dados em coordenadas).

(ii) Seja $D = A + \lambda\vec{v}$. Então, por definição, temos $\overrightarrow{AD} = \lambda\vec{v}$. Pondo $D = (x, y, z)$, segue da parte (i) que

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

(*) As coordenadas de A, B e $A + \lambda\vec{v}$ são relativas a $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, e as de $\vec{v}$ e $\overrightarrow{BA}$ a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

ou seja, $x - x_1 = \lambda a$, $y - y_1 = \lambda b$ $z - z_1 = \lambda c$, devido à unicidade da tripla de coordenadas de um vetor em relação a uma base. Daí $x = x_1 + \lambda a$, $y = y_1 + \lambda b$, $z = z_1 + \lambda c$, ou seja,

$$D = (x, y, z) = (x_1 + \lambda a,\ y_1 + \lambda b,\ z_1 + \lambda c)$$

AVISO

Doravante, nos exercícios resolvidos e propostos, estará subentendido sempre que necessário que se fixou um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Se for o caso, deixaremos explícito que o sistema é ortogonal, e o indicaremos por $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dados $P = (1, 3, -3)$, $Q = (0, -1, 4)$, $\vec{v} = (-1, 4, 0)$ ache (em coordenadas)

a) $\overrightarrow{QP}$

b) $P + \vec{v}$

c) $Q + 2\,\overrightarrow{PQ}$

Resolução

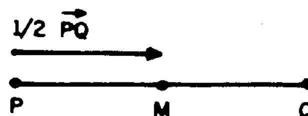
a) $\overrightarrow{QP} = (1 - 0,\ 3 + 1,\ -3 - 4) = (1, 4, -7)$

b) $P + \vec{v} = (1, 3, -3) + (-1, 4, 0) = (1 - 1, 3 + 4, -3 + 0) = (0, 7, -3)$

c) $Q + 2\,\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 4) - 2\,\overrightarrow{QP} = (0, -1, 4) - 2\,(1, 4, -7) = (0, -1, 4) - (2, 8, -14) =$
$= (0 - 2, -1 - 8, 4 + 14) = (-2, -9, 18)$

2. Ache as coordenadas do ponto médio M do segmento de extremidades $P = (-1, 4, 7)$ e $Q = (0, 1, 1)$

Resolução



Temos (ver figura)

$$M = P + \frac{1}{2}\vec{PQ} = (-1, 4, 7) + \frac{1}{2}(1, -3, -6) = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4).$$

Observação Se $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então o ponto médio M do segmento de extremidades P e Q é dado por

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

Prove isto, partindo de $M = P + \frac{1}{2}\vec{PQ}$.

3. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$?

Resolução



Temos (ver figura) $\vec{MP'} = \vec{PM}$. Logo $P' = M + \vec{PM} = (1, 2, -1) + (0, 2, -4) = (1, 4, -5)$.

4. Mostre que os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, 1, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo (sistema ortogonal).

Resolução

Temos $\vec{AB} = (-2, 0, 1)$, $\vec{AC} = (0, 1, 0)$, $\vec{CB} = (-2, -1, 1)$, e daí vemos que A, B, C não são colineares, pois $(\vec{AB}, \vec{AC})$ é LI. Além disso, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2) . 0 + 0 . 1 + 1 . 0 = 0$, o que mostra que $B\hat{A}C$ é reto.

Pergunta Valeria essa resolução se o sistema não fosse ortogonal? Por quê?

5. Se o sistema de coordenadas é ortogonal, mostre que o triângulo ABC é equilátero, sendo $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 0, 0)$.

Resolução

Temos $\vec{AB} = (-1, -1, 2)$, $\vec{AC} = (1, -2, 1)$, $\vec{BC} = (2, -1, -1)$.

Logo, como a base é *ortonormal*, obtemos

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

o que mostra que os três lados do triângulo têm mesmo comprimento.

Observação

Se o sistema de coordenadas é ortogonal, *e só neste caso*, a distância entre os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ se calcula pela fórmula

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \qquad (2)$$

pois $d(A, B) = \|\vec{BA}\|$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a) Mostre que os pontos $P = (-1, 0, 0)$, $Q = (2, -1, -1)$, $R = (0, 3, 1)$ e $S = (4, 5, 1)$ são vértices de um quadrilátero plano, convexo. Em seguida, especifique quais são seus lados e quais são suas diagonais (um quadrilátero é convexo se e só se nenhum de seus vértices é interior ao triângulo determinado pelos outros três; veja o Exercício 20 do Capítulo 4).

   b) Verifique se os pontos $A = (2, 6, -5)$, $B = (6, 9, 7)$, $C = (5, 5, 0)$ e $D = (3, 10, 2)$ são vértices de um paralelogramo.

   c) Mostre que os pontos $E = (3, 0, -1)$, $F = (0, 3, 0)$, $G = (5, 1, -2)$, $H = (-4, 1, 2)$, são vértices de um trapézio.

2. Como se reconhece, através de suas coordenadas, um ponto do eixo das abscissas? e do eixo das ordenadas? e do eixo das cotas? E como se reconhecem pontos de cada um dos três planos coordenados?

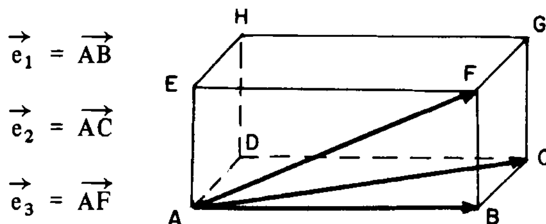
3. Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema *ortogonal* de coordenadas em E^3 e seja $P = (a, b, c)$. Determine os pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6, respectivamente, projeções ortogonais de P sobre Oxy, Oxz, Oyz, Ox, Oy e Oz (faça uma figura).

4. Na figura ao lado, ABCDEFGH é um paralelepípedo retângulo. Sejam:

$\vec{e}_1 = \vec{AB}$

$\vec{e}_2 = \vec{AC}$

$\vec{e}_3 = \vec{AF}$



a) Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H, em relação ao sistema $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

b) Idem, em relação ao sistema $(H, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

c) Idem, em relação ao sistema $(G, -\vec{e}_3, \frac{1}{2}\vec{e}_1, 2\,\vec{e}_2)$.

d) Idem, em relação ao sistema $(A, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$.

CAPÍTULO 14

ESTUDO DA RETA

Considere uma reta $r \subset E^3$. Escolha um ponto $A \in r$, e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ paralelo a r. Então é fácil ver que um ponto $X \in E^3$ pertence a r se e somente se $\overrightarrow{AX}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes (ver figura), isto é, se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{v}$ ou seja

$$\boxed{X = A + \lambda \vec{v}} \qquad (1)$$

Em outras palavras, dado λ real, (1) nos dá um ponto X de r, e dado $X \in r$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que (1) se verifica. A reta r é, pois, o lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que vale (1).

A equação (1) se chama *equação vetorial* da reta r.

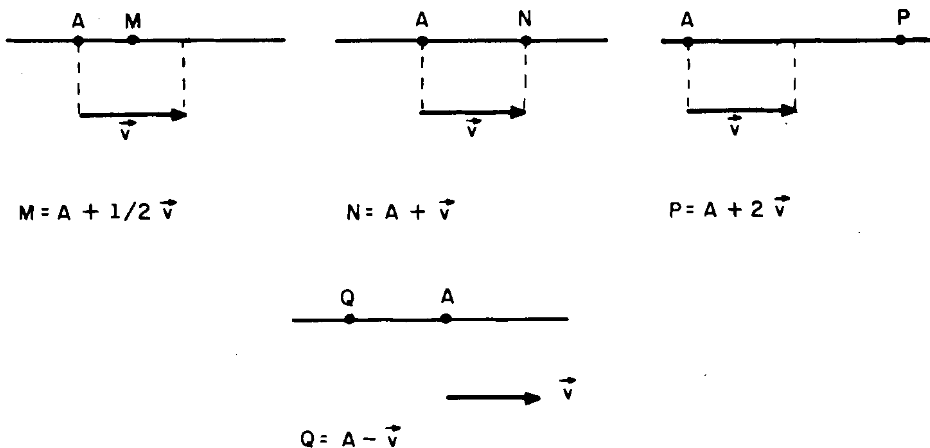
Escreve-se

$$\boxed{r: \ X = A + \lambda \vec{v}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

Observações

1. Observe que (1) não é a *única* equação vetorial de r, pois se tomarmos outro ponto $A' \in r$, teremos que $X = A' + \lambda \vec{v}$ também é uma equação vetorial de r, porquanto $X \in r \Leftrightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{A'X} = \lambda \vec{v}$. Poderíamos também ter tomado $\vec{w} \neq \vec{0}$ paralalelo a $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{v}$, e teríamos outra equação vetorial de r, a saber $X = A' + \lambda \vec{w}$.

2. É importante que você sinta intuitivamente que se λ percorre o conjunto dos números reais, X, dado por (1), percorre toda a reta r. Para isso, veja a figura a seguir.



3. Se A e B são pontos distintos de r, então $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é não-nulo e paralelo a r, de modo que $X = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ é uma equação vetorial de r. É claro que $X = B + \lambda \overrightarrow{AB}$ e $X = B + \lambda \overrightarrow{BA}$ são também equações vetoriais de r.

4. Usando uma linguagem mais livre, podemos dizer que o vetor $\vec{v}$ de (1) serve para fixar a direção da reta r, ao passo que o ponto A serve para fixar sua posição no espaço (uma reta fica determinada por um de seus pontos e sua direção). Chamaremos freqüentemente $\vec{v}$ de *vetor diretor* ou simplesmente *diretor* de r. Pelas observações já feitas, vemos que uma reta admite muitos diretores, todos paralelos entre si (dois a dois LD). Um vetor diretor de r não pode ser nulo!

5. Outro modo de interpretar a equação (1) é encará-la como se ela descrevesse o movimento de um ponto sobre a reta r, com velocidade (vetorial) constante igual a $\vec{v}$, λ indicando o tempo, e A a posição no instante inicial $\lambda = 0$. Valores negativos de λ indicariam o "passado" do movimento, em relação ao instante inicial. A cada valor de λ, teríamos uma posição bem determinada do ponto móvel, e fazendo λ percorrer todo o conjunto $\mathbb{R}$, a reta r seria percorrida integralmente pelo ponto (r seria a trajetória do movimento). Como há muitos movimentos retilíneos uniformes com a mesma trajetória, fica fácil entender por que existem muitas equações vetoriais para a mesma reta.

6. Por tudo o que ficou dito acima, vê-se claramente que se $X = A + \lambda\vec{u}$ e $X = B + \lambda\vec{v}$ são equações vetoriais de uma reta r, o valor de λ correspondente a um ponto $Q \in r$ não tem porque ser o mesmo nas duas. O mesmo se diga, por maior razão, se elas forem equações de retas distintas. Conclusão: se você for "misturar" as equações em seus cálculos, deve mudar a notação escrevendo por exemplo $X = B + \mu\vec{v}$ em vez de $X = B + \lambda\vec{v}$.

Tomemos agora um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, em relação ao qual sejam $X = (x, y, z)$, $A = (x_o, y_o, z_o)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$.

Substituindo em (1) resulta

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(a, b, c)$$

$$\therefore \quad (x, y, z) = (x_o + \lambda a, y_o + \lambda b, z_o + \lambda c)$$

Logo

$$\begin{cases} x = x_o + \lambda a \\ y = y_o + \lambda b \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + \lambda c \end{cases} \qquad (2)$$

Observe que a, b, c não são todos nulos, pois $\vec{v} \neq \vec{0}$, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. As equações (2) são chamadas *equações paramétricas* de r. λ é chamado *parâmetro*.

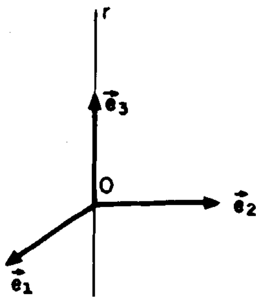
Suponha agora que seja dado um sistema linear como (2), com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Então, *fixado um sistema de coordenadas,* existe uma reta da qual as equações (2) são equações paramétricas: é a reta que passa por (x_o, y_o, z_o) e é paralela ao vetor (a, b, c).

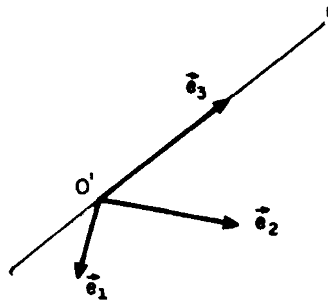
Observe que se você fixar *outro* sistema de coordenadas, mantendo o *mesmo* sistema de equações, as retas em geral são distintas.

Por exemplo, se o sistema de equações é

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \qquad (A = (0,0,0),\ \vec{v} = (0,0,1) = \vec{e}_3)$$

então, a reta r passa pela origem e é paralela a $\vec{e}_3$. Veja agora a figura:





Obtivemos retas distintas!

Observações

As Observações 1 a 6 anteriores se adaptam naturalmente às equações na forma paramétrica; em especial destacamos:

1. Se a reta passa pelos pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então podemos tomar $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$ e teremos para equações paramétricas de r

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_1 - x_2) \\ y = y_1 + \lambda(y_1 - y_2) \\ z = z_1 + \lambda(z_1 - z_2) \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. Assim como a equação vetorial (1), as equações paramétricas (2) (que provêm dela) não são determinadas de modo único. Dependem da escolha de A e de $\vec{v}$, e do sistema de coordenadas.

3. Releia a Observação 6.

Se, em (2) tivermos $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então podemos eliminar λ e obter

$$\boxed{\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}} \qquad (3)$$

que são as chamadas *equações de r na forma simétrica.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache as equações nas formas vetorial, paramétrica e simétrica da reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, 0)$.

Resolução

Escolhendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$ como vetor diretor, e o ponto A, temos:

equação vetorial: $X = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, -1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + \lambda(-1) \\ y = 0 + \lambda\, 1 \\ z = 1 + \lambda(-1) \end{cases}$

coordenadas de um ponto da reta

coordenadas de um vetor diretor da reta.

equações na forma simétrica: $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 0}{1} = \dfrac{z - 1}{-1}$

2. Escreva uma equação vetorial da reta r, que passa pelo ponto médio M do segmento AB, e que tem vetor diretor

$\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{49}, \frac{3\sqrt{3}}{98}, \frac{-\sqrt{3}}{7})$. São dados: A = (1, 1, 3) e B = (3, 1, 0).

Resolução

Sendo M o ponto médio de AB, temos:

$$M = (\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{3+0}{2}) = (2, 1, \frac{3}{2})$$

Como $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u} = (2, 3, -14)$, pois $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{98}\vec{u}$, podemos tomar $\vec{u}$ como vetor diretor de r. Assim, uma equação vetorial de r é

$$x = (2, 1, \frac{3}{2}) + \lambda(2, 3, -14) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

3. Dê dois vetores diretores distintos e quatro pontos distintos da reta r que tem equação vetorial

$$X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Resolução

Sabemos que $\vec{v} = (1, 1, 1)$ é um vetor diretor de r. Para obtermos outro, basta escolher um vetor $\vec{w}$ que seja múltiplo de $\vec{v}$; por exemplo: $\vec{w} = (2, 2, 2)$.

Quanto aos pontos, basta atribuir valores a λ; por exemplo:

$\lambda = 0 \Rightarrow X = (1, 2, 0)$

$\lambda = 2 \Rightarrow X = (1, 2, 0) + (2, 2, 2) = (3, 4, 2)$

$\lambda = -1 \Rightarrow X = (1, 2, 0) + (-1, -1, -1) = (0, 1, -1)$

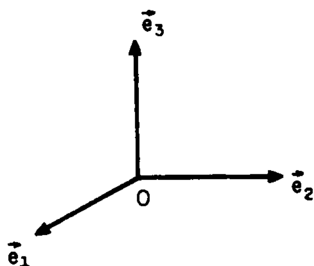
$\lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow X = (1, 2, 0) + (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2})$

Logo, os pontos $A = (1, 2, 0)$, $B = (3, 4, 2)$, $C = (0, 1, -1)$ e $D = (\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2})$ são pontos de r.

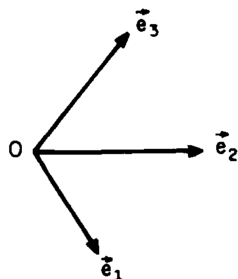
4. Dado o sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

esboce a representação geométrica da reta r que tem essas equações como equações paramétricas nos casos:



$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$



$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$

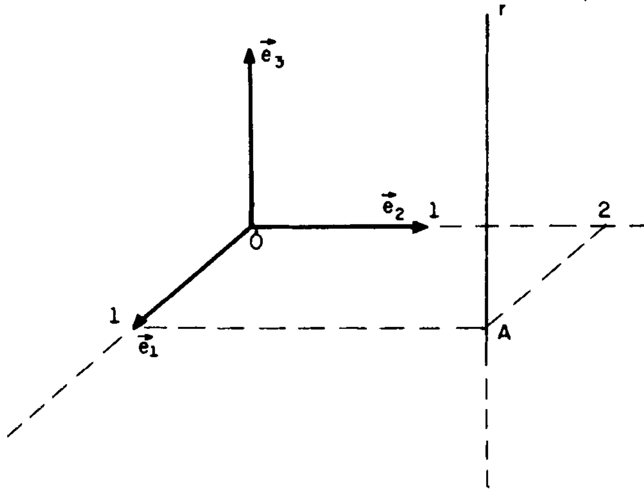
Resolução

Escrevemos o sistema assim:

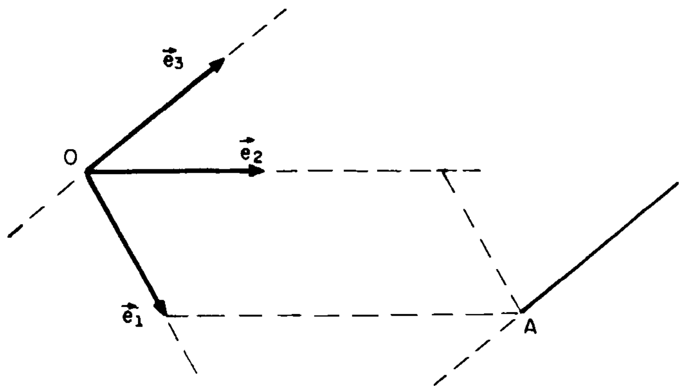
$$\begin{cases} x = \boxed{1} + \lambda \cdot \boxed{0} \\ y = \boxed{2} + \lambda \cdot \boxed{0} \\ z = \boxed{0} + \lambda \cdot \boxed{2} \end{cases}$$

e vemos imediatamente que a reta passa por A = (1, 2, 0) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (0, 0, 2) = 2\vec{e}_3$. Então

(i)



(ii)



5. Dadas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6 - 5\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

de uma reta r, achar uma equação vetorial de r.

Resolução

Dispomos o sistema assim:

$$\begin{cases} x = \boxed{1} + \lambda \cdot \boxed{3} \\ y = \boxed{0} + \lambda \cdot \boxed{2} \\ z = \boxed{6} + \lambda \cdot \boxed{(-5)} \end{cases}$$

e imediatamente reconhecemos que r passa por $A = (1, 0, 6)$ e é paralela a $\vec{v} = (3, 2, -5)$. Então uma equação vetorial de r é

$$X = (1, 0, 6) + \lambda(3, 2, -5)$$

6. Verifique se o ponto $P = (4, 1, -1)$ pertence à reta r: $X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Resolução

Para que $P \in r$ é necessário e suficiente que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$P = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)$$

Ora, essa igualdade é equivalente a

$$(4, 1, -1) = (1 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$$

ou

$$\begin{cases} 4 = 1 + 2\lambda \\ 1 = \lambda \\ -1 = 1 + \lambda \end{cases}$$

Como o sistema é incompatível (não existe um valor de λ que satisfaça simultaneamente às três equações), concluímos que $P \notin r$.

7. São dadas as equações

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z+1$$

a) Mostre que elas representam uma reta r.

b) Elas são equações na forma simétrica de r? Caso não sejam, passe-as para a forma simétrica.

c) Exiba um ponto e um vetor diretor de r.

Resolução

Sendo

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{x-1/2}{3/2}$$

$$\frac{1-y}{2} = \frac{y-1}{-2}$$

$$z+1 = \frac{z+1}{1}$$

as equações dadas podem ser escritas

$$\frac{x-1/2}{3/2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1} \qquad (\alpha)$$

que são equações na forma simétrica de uma reta que passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, 1, -1)$ e tem $\vec{v} = (\frac{3}{2}, -2, 1)$ por vetor diretor. Então,

a) as equações dadas, por serem equivalentes a (α), representam uma reta r;

b) elas não são equações na forma simétrica de r, pois não atendem à definição anterior. Todavia podemos passá-las para a forma simétrica: é o que fizemos acima, obtendo (α).

c) $A = (\frac{1}{2}, 1, -1)$ e $\vec{v} = (\frac{3}{2}, -2, 1)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos Exercícios 2, 4, 8, 9, 10 e 13 o sistema de coordenadas é suposto ortogonal.

1. São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

   a) Escreva equações vetorial e paramétricas para a reta determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?

   b) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

   c) Escreva equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

2. Dados os pontos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 2, 1)$ e $C = (1, 0, 1)$, obtenha equações paramétricas das bissetrizes interna e externa do triângulo ABC, relativas ao vértice C (veja o Exercício 4 a), do Capítulo 4).

3. Obtenha equações paramétricas para os três eixos coordenados.

4. Dados os pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$, determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento de PB seja o triplo do comprimento de PA.

5. Escreva equações paramétricas para a reta r, que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ e:

   a) é paralela à reta

$$s: \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$$

   b) é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$

   c) é paralela à reta s': $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

6. Passe para a forma simétrica, quando for possível, as equações obtidas no exercício anterior.

7. Verifique se $r = s$ nos casos:

a) $$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \dfrac{1}{2}\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

b) $$r: \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \lambda \\ y = -\dfrac{1}{3} + \lambda \\ z = \dfrac{2}{3} - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

c) $$r: \quad X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -\tfrac{1}{2}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$s: \quad X = (0, 1, \tfrac{1}{2}) + \mu(-2, 0, 1) \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

8. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r: X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. Em seguida, diga se a distância do ponto A à reta r é maior, menor, ou igual a $\sqrt{3}$, e por quê.

9. Idem para $A = (1, 1, 1)$, a distância sendo $\sqrt{11}$, e

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

10. Dada a reta r: $X = (1, 0, 0) + \lambda (1, 1, 1)$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, ache o ponto de r equidistante de A e B.

11. Ache equações paramétricas da reta que passa por $A = (3, 3, 3)$ e é paralela à reta BC, sendo $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, -1)$.

12. Dois pontos efetuam movimentos descritos pelas equações

$$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pergunta-se se as trajetórias são concorrentes e se haverá colisão.

13. Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada um dos casos a seguir ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $\frac{1}{2}$.

a) $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 2, 3)$

b) $A = (1, 3, 2)$, $B = (2, 2, 2)$

c) $A = (3, 0, 2)$, $B = (2, 1, 2)$

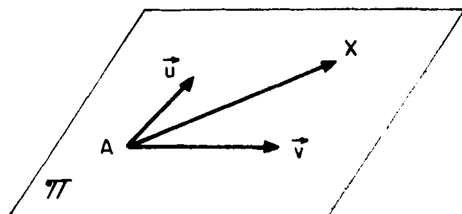
d) $A = (3, -2, 1)$, $B = (0, 0, 1)$

CAPÍTULO 15

ESTUDO DO PLANO

§ 1 Equação Vetorial e Equações Paramétricas de um Plano

Seja $\pi \subset E^3$ um plano. Escolha um ponto $A \in \pi$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente independentes e paralelos a π. Então é fácil ver que $X \in \pi$ se e somente se $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ são linearmente dependentes (os três são paralelos a π), e isto ocorre se e somente se existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Logo

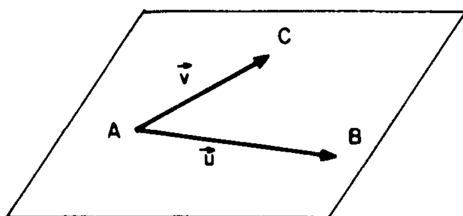


$$\boxed{X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})} \tag{1}$$

Em outras palavras, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (1) nos dá um ponto X de π, e dado $X \in \pi$, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que (1) se verifica. O plano π é, pois, o lugar geométrico dos pontos de E^3 que obedecem (1). A equação (1) se chama *equação vetorial* de π.

Observações

1. Se A, B, C são pontos distintos e não colineares de π, podemos tomar $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (por



exemplo) e então $X = A + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ é uma equação vetorial de π; $X = C + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{CB}$ é outra equação vetorial de π.

2. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados vetores diretores do plano π.

Tomemos agora um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Escrevendo $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$, resulta de (1) que

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p)$$

ou

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a + \mu m, y_0 + \lambda b + \mu n, z_0 + \lambda c + \mu p)$$

Logo,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases} \qquad (2)$$

As equações (2) são chamadas *equações paramétricas* de π.

Suponha agora que seja dado um sistema linear como (2), em que (a, b, c), (m, n, p) sejam linearmente independentes. Então, fixado um sistema de coordenadas, existe um plano tendo as equações (2) como equações paramétricas. É o plano que passa por (x_0, y_0, z_0) e é paralelo a (a, b, c) e (m, n, p). É claro que fixado *outro* sistema de coordenadas, as mesmas equações podem representar um *outro* plano.

Observação

Se π passa pelos pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ não-colineares, então podemos tomar como vetores diretores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ e daí

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}$$

são equações paramétricas de π.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache duas equações vetoriais do plano que passa por $A = (-3, -7, 1)$, e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

Resolução

Temos

$$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (-3, -7, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 1, 0) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Esta é uma equação vetorial do plano. Uma outra seria, por exemplo,

$$X = A + \lambda(-\vec{u}) + \mu\vec{v} = (-3, -7, 1) + \lambda(-1, -1, -1) + \mu(-1, 1, 0) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

2. Ache uma equação vetorial do plano que contém os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Resolução

Temos

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$, que são linearmente independentes; logo

$$X = A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$$

ou

$$X = (0, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, -1, 1) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

é uma equação vetorial do plano.

3. Dê equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A = (7, 7, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

Resolução

Temos imediatamente

$$\begin{cases} x = \boxed{7} + \lambda \cdot \boxed{1} + \mu \cdot \boxed{(-1)} \\ y = \boxed{7} + \lambda \cdot \boxed{1} + \mu \cdot \boxed{0} \\ z = \boxed{1} + \lambda \cdot \boxed{1} + \mu \cdot \boxed{1} \end{cases}$$

↑ coordenadas de um ponto de π ↑ coordenadas de $\vec{u}$ ↑ coordenadas de $\vec{v}$

ou

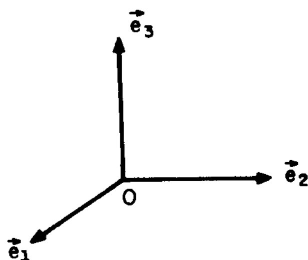
$$\begin{cases} x = 7 + \lambda - \mu \\ y = 7 + \lambda \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

4. Esboce o plano que tem por equações paramétricas

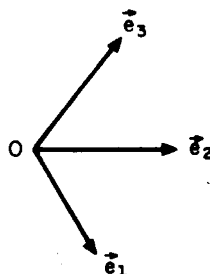
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

nos casos

(i)



(ii)



Resolução

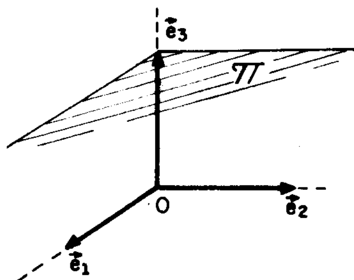
Escrevendo as equações na seguinte disposição

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \\ y = 0 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \\ z = 1 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \end{cases}$$

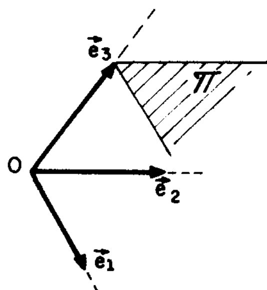
$$A \qquad \vec{u} \qquad \vec{v}$$

vemos que π passa por $A = (0, 0, 1)$ e é paralelo a $\vec{u} = (1, 0, 0) = \vec{e}_1$, e a $\vec{v} = (0, 1, 0) = \vec{e}_2$.
Assim, temos

(i)



(ii)



5. Dê uma equação vetorial do plano π que tem por equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -6 + \lambda - \mu \\ y = -1 + 7\lambda - 14\mu \\ z = 4 - 5\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Resolução

Dispondo as equações assim:

$$\begin{cases} x = -6 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot (-1) \\ y = -1 + \lambda \cdot 7 + \mu \cdot (-14) \\ z = 4 + \lambda \cdot (-5) + \mu \cdot 2 \end{cases}$$

vemos que π passa por $(-6, -1, 4)$ e é paralelo aos vetores $(1, 7, -5)$ e $(-1, -14, 2)$, logo

$$X = (-6, -1, 4) + \lambda(1, 7, -5) + \mu(-1, -14, 2)$$

é uma equação vetorial de π.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos descritos abaixo:

a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$

2. Verifique (e explique por que) se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos:

a) $\pi_1: X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1)$

$\pi_2: X = (1, 2, 1) + \alpha(-1, 1, -2) + \beta(-3, 4, -6)$

b) $\pi_1: X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$

$\pi_2: X = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -1)$

c) $\pi_1: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$

$\pi_2: X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$

d) $\pi_1: X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$

$\pi_2: X = (0, 1, 1) + \alpha(1, 3, -5) + \beta(1, -1, 3)$

3. Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, 4)$ em duas parcelas, sendo uma delas paralela ao plano $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$ e outra paralela à reta $X = (0, 0, 0) + \nu(2, 1, 0)$.

4. Ache dois pontos A e B da intersecção dos planos π_1 e π_2, e escreva uma equação vetorial para a reta que passa por A e B. Dados:

$\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$

$\pi_2: X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 3, 0) + \mu(-2, -1, -1).$

5. Escreva equações paramétricas para os três planos coordenados.

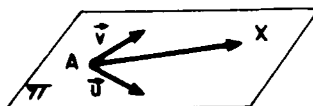
6. Escreva equações vetoriais para os planos bissetores dos diedros determinados pelos planos coordenados (são 6 bissetores!). Suponha que o sistema é ortogonal.

7. Obtenha equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano

$\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$

§ 2 Equação Geral

Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema de coordenadas, e $\pi \subset E^3$ um plano que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$, paralelo aos vetores linearmente independentes $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Então, $X = (x, y, z)$ pertence a π se e somente se os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, são linearmente dependentes, isto é, se e somente se



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

ou seja, desenvolvendo por Laplace esse determinante relativamente à primeira linha, se e somente se

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} + (y - y_0)\begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} = 0$$

e daí, equivalentemente,

$$x\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} - x_0\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} - y_0\begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix} - z_0\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, pondo

$$a = \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$d = -x_o \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix} - y_o \begin{vmatrix} t & r \\ p & m \end{vmatrix} - z_o \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}$$

temos

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \qquad (4)$$

Observe que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, isto é, que a, b, c não são simultaneamente nulos, pois se assim fosse, os números r, s, t seriam proporcionais a m, n, p (verifique por que) e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seriam linearmente dependentes. A equação (4) se diz uma *equação geral* do plano π.

Suponha agora que seja dada a equação

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{com} \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \qquad (5)$$

Então, fixado um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, existe um plano π que tem (5) por equação geral. Vamos mostrar isto.

Como a, b, c não são simultaneamente nulos, um deles, digamos a, é diferente de zero. Neste caso, (5) é equivalente a

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} \qquad (6)$$

Fazendo:

$$y = z = 0, \qquad \text{vem} \qquad x = -\frac{d}{a} \quad ;$$

$$y = 0,\ z = 1, \qquad \text{vem} \qquad x = -\frac{c}{a} - \frac{d}{a}$$

$$y = 1,\ z = 0, \qquad \text{vem} \qquad x = -\frac{b}{a} - \frac{d}{a}.$$

Considere os pontos

$$A = (-\frac{d}{a}, 0, 0), \quad B = (-\frac{c}{a} - \frac{d}{a}, 0, 1), \quad C = (-\frac{b}{a} - \frac{d}{a}, 1, 0).$$

Como $\overrightarrow{AB} = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$, vê-se claramente que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes, e portanto A, B, C não são colineares, determinando, pois, um plano π. Para obter uma equação geral de π escrevemos (veja (3))

$$\begin{vmatrix} x-(-d/a) & y-0 & z-0 \\ -c/a & 0 & 1 \\ -b/a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante obtemos $ax + by + cz + d = 0$, o que prova a afirmação feita.

Observações

1. As considerações acima nos permitem dizer o seguinte. Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ fixo, e $\pi \subset E^3$ um subconjunto. Então π é um plano $\Leftrightarrow$ existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tais que $\pi = \{X = (x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$.

2. Se o plano π passa por $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, pontos estes não colineares, então uma equação geral de π pode ser obtida a partir de

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

o que é equivalente (tente provar) a

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

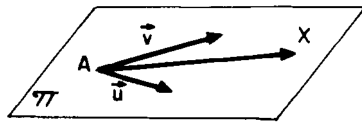
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache uma equação geral do plano π que passa por $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Resolução

É bom verificar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, o que é fácil. Então $X = (x, y, z)$ é um ponto de π se e somente se $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ são linearmente dependentes, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+1 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



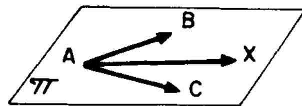
Desenvolvendo o determinante, vem $x - z - 9 = 0$.

2. Idem, π passando por $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (2, 1, 2)$.

Resolução (*)

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$$



Esses vetores são linearmente independentes. Então, uma equação geral será obtida a partir de

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que fornece $y - z + 1 = 0$.

(*) Poderíamos usar a fórmula da Observação 2, mas preferimos a resolução acima.

3. Dadas equações paramétricas de um plano π,

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

obtenha uma equação geral de π.

Primeira Resolução (eliminando λ e μ).

Substituindo $z = \lambda$ (que é a terceira equação) nas duas primeiras, vem

$$\begin{cases} x = -1 + 2z - 3\mu \\ y = 1 + z + \mu \end{cases}$$

Da segunda equação vem $\mu = y - 1 - z$ que levada à primeira fornece

$$x + 3y - 5z - 2 = 0$$

Segunda Resolução (achando um ponto de π e dois vetores linearmente independentes paralelos a π).

As equações podem ser dispostas assim:

$$\begin{cases} x = \boxed{-1} + \lambda \cdot \boxed{2} + \mu \cdot \boxed{(-3)} \\ y = \boxed{1} + \lambda \cdot \boxed{1} + \mu \cdot \boxed{1} \\ z = \boxed{0} + \lambda \cdot \boxed{1} + \mu \cdot \boxed{0} \end{cases}$$

Daí, imediatamente se escreve

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

De onde resulta

$$x + 3y - 5z - 2 = 0$$

4. Um plano tem por equação geral $x + 2y - z - 1 = 0$. Obtenha equações paramétricas de π.

Primeira Resolução

Um modo de resolver é obter três soluções da equação dada, de forma que os pontos correspondentes não sejam colineares.

Por exemplo,

$x = y = 0 \Rightarrow z = -1 \quad \therefore \quad A = (0, 0, -1)$ pertence a π.

$x = z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad B = (0, \frac{1}{2}, 0)$ pertence a π.

$y = z = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \therefore \quad C = (1, 0, 0)$ pertence a π.

Como $\vec{CB} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$ e $\vec{AC} = (1, 0, 1)$ são LI, A, B e C não são colineares. Segue que

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \end{cases}$$

são equações paramétricas de π.

Segunda Resolução (melhor)

Escreva $y = \lambda$ e $z = \mu$. Substituindo na equação dada vem $x + 2\lambda - \mu - 1 = 0$, $x = 1 - 2\lambda + \mu$. Portanto temos

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Pode-se justificar esse procedimento em geral (veja o Exercício 14). Se $ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, é uma equação geral de um plano, então ou $a \neq 0$, ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Se $a \neq 0$, faça $y = \lambda$, $z = \mu$ e daí $x = -\frac{b}{a}\lambda - \frac{c}{a}\mu - \frac{d}{a}$.

Se $b \neq 0$, faça $x = \lambda$, $z = \mu$ e daí $y = -\frac{a}{b}\lambda - \frac{c}{b}\mu - \frac{d}{b}$.

Se $c \neq 0$, faça $x = \lambda$, $y = \mu$ e daí $z = -\frac{a}{c}\lambda - \frac{b}{c}\mu - \frac{d}{c}$.

5. Uma reta r é dada como intersecção de dois planos:

$$r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Dê equações paramétricas de r.

Primeira resolução

A idéia é chamar uma das variáveis x, y, z de λ, e achar as outras em função de λ. Fazendo $x = \lambda$, chegamos a

$$\begin{cases} y + z = -\lambda + 1 \\ y - z = -\lambda \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $y = \frac{1}{2} - \lambda$, $z = \frac{1}{2}$, e portanto

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

são equações paramétricas de r.

Note que todos os pontos de r têm cota $z = \frac{1}{2}$ (constante). Logo z não serve como parâmetro, isto é, não podemos fazer $z = \lambda$. E quanto a $y = \lambda$?

Segunda resolução

Se acharmos dois pontos distintos de r, saberemos escrever equações paramétricas de r. Basta então achar duas soluções distintas do sistema

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Por exemplo, os pontos $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ e $B = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, obtidos fazendo respectivamente $y = 0$ e $y = 1$ no sistema acima, são pontos da reta r. Então $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ e portanto

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

são equações paramétricas de r.

Observação

É bastante freqüente descrever-se uma reta r por um par de equações da forma

$$\boxed{\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}} \qquad (6)$$

com $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0$ e $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0$, isto é, encarar a reta r como interseção de dois planos π_1 e π_2. É claro que nesse caso esses dois planos não devem ser paralelos, e uma condição necessária e suficiente para isso, como veremos no Capítulo 16, é que os coeficientes a_1, b_1, c_1 *não sejam* proporcionais a a_2, b_2, c_2. O exercício anterior mostra como se obtêm, nesse caso, equações paramétricas da reta.

Por outro lado, dadas equações paramétricas de uma reta r, podemos obter equações de r sob a forma (6) eliminando o parâmetro – por substituição, por exemplo. Caso o parâmetro não compareça em uma das três equações paramétricas, esta já é equação de um plano que contém r. Vejamos exemplos.

1º)

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Temos, da terceira equação,

$$\lambda = z - 3$$

Substituindo nas outras duas, vem $x = 1 - (z-3)$ e $y = 2 + 2(z-3)$, ou

$$r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

isto é, r é a interseção dos planos $\pi_1 : x + z - 4 = 0$ e $\pi_2 : y - 2z + 4 = 0$.

2º)

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Como $x = 2$ é equação de um plano π_1 e todo ponto de r obedece a essa equação, temos que $r \subset \pi_1$. Para obter outro plano, π_2, que contenha r, basta eliminar λ nas outras duas equações; obtemos $y = z$. Assim,

$$r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

3º)

$$r: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Essa reta está contida nos planos $\pi_1 : y = 0$, e $\pi_2 : z = \dfrac{1}{3}$, pois todo ponto de r satisfaz a essas duas equações. Logo,

$$\begin{cases} y = 0 \\ z - \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

são equações de r na forma (6).

Finalmente, repare que o procedimento de "eliminar o parâmetro" já foi utilizado no capítulo anterior, para se obter equações de uma reta na forma simétrica, que nada mais é do que um caso particular da forma (6). Assim, se

$$r: \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$$

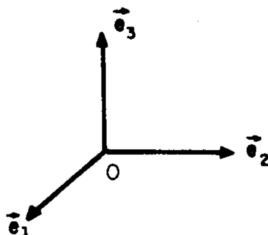
podemos escrever

$$r: \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{z}{-2} \\ \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-2} \end{cases}$$

ou

$$r: \begin{cases} 2x + 3z - 2 = 0 & (\pi_1) \\ y + z + 2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

6. Faça um esboço do plano de equação geral $x + y - 2 = 0$, relativamente ao sistema ortogonal de coordenadas ilustrado na figura.



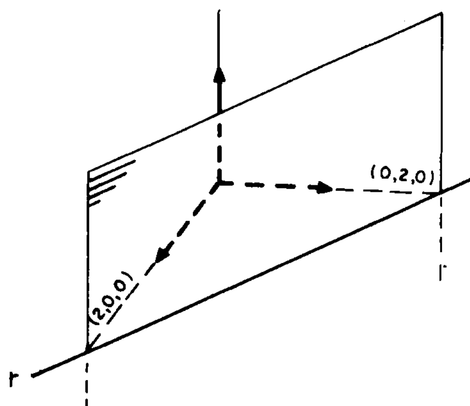
Resolução

Os pontos do plano devem obedecer à equação $x + y = 2$, de modo que sua coordenada "z" pode tomar qualquer valor real. Então, se um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ pertence ao plano, qualquer ponto $Q = (x_0, y_0, z)$ também pertence. O plano contém então todas as retas "verticais" que furam o plano Oxy ao longo da reta r, indicada na figura seguinte.

Observação

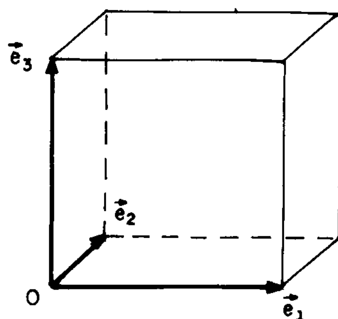
Na Geometria Analítica Plana, a equação $x + y = 2$ representava a *reta* r. Cuidado, que agora se trata de um *plano*; aquela reta tem equações

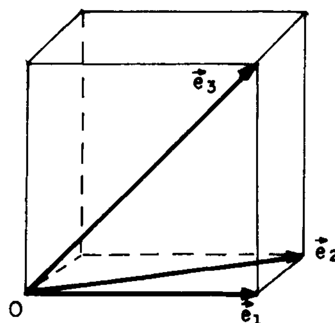
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Faça um esboço dos planos com equações gerais dadas abaixo, relativamente aos sistemas de coordenadas ilustrados nas figuras.





(I) CUBOS (II)

a) $x - 2 = 0$ b) $y + 1 = 0$ c) $z + 4 = 0$ d) $x + y - 1 = 0$

e) $x - z = 0$ f) $y - z - 2 = 0$ g) $x + y + z - 1 = 0$

2. Passe para a forma paramétrica as equações gerais dos planos do exercício anterior.

3. Obtenha equações gerais dos planos coordenados e dos planos bissetores dos diedros determinados por eles (suponha o sistema ortogonal).

4. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos (explique por que):

a) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0, \quad \pi_2 : 2x - 6y + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1 : x - \frac{y}{2} + 2z - 1 = 0, \quad \pi_2 : -2x + y - 4z + 2 = 0$

5. Obtenha equações gerais para os planos π descritos abaixo:

a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

6. Dadas as retas

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z \qquad \text{e} \qquad s : x - 1 = y = z$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s.

7. Idem, sendo

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4} \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$$

8. Obtenha uma equação geral do plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

9. Idem,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$$

10. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Seja π_2 o plano que passa por $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Seja π_3 o plano de equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$.

a) Escreva equações gerais de π_1, π_2 e π_3

b) Mostre que a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto; determine-o.

11. Verifique se a reta r está contida no plano π nos seguintes casos:

a) $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 0)$, $\pi: x + 2y + 3z = 1$

b) $\pi: X = (1, 4, 1) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(-1, 2, -1)$ e r passa pelos pontos $A = (2, 3, 2)$ e $B = (0, 0, 1)$

c) $r: x - 1 = 2y = 4 - z$ e $\pi: x + 2y - 2z + 1 = 0$

12. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r: X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$

a) Mostre que $P \notin r$.

b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

13. Verifique, em cada um dos casos seguintes, se as retas r e s são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto P comum a elas e escreva uma equação geral do plano determinado por elas.

a) $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{2+z}{5}$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

14. Seja $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π. Suponhamos $a \neq 0$. Prove que

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}\lambda - \dfrac{c}{a}\mu - \dfrac{d}{a} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

são equações paramétricas de π.

Sugestão Verifique se elas são equações paramétricas de algum plano π_1. Mostre que $\pi_1 \subset \pi$, donde $\pi_1 = \pi$.

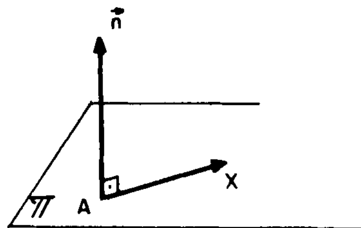
§ 3 Vetor Normal a um Plano

Atenção Neste parágrafo, o sistema de coordenadas adotado é obrigatoriamente *ortogonal*.

Consideremos um plano $\pi \subset E^3$. Chama-se vetor normal a π a qualquer vetor *não nulo* ortogonal a π. É claro, pois, que $\vec{n} \neq \vec{0}$ é um vetor normal a π se e somente se $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor paralelo a π (ou: a qualquer vetor diretor de π(*)). Vejamos como obter uma equação geral de π conhecendo um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ de π e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ normal a π ($\therefore a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$): pondo $X = (x, y, z)$, temos que

$$X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \perp \vec{n}$$

(*) Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores diretores de π, linearmente independentes, o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor normal a π.



logo

$$X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$$

ou

$$X \in \pi \Leftrightarrow (x - x_0)\,a + (y - y_0)\,b + (z - z_0)\,c = 0$$

e pondo

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \qquad (7)$$

concluímos que

$$X \in \pi \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Então, esta última equação é uma equação geral de π; a particularidade importante é que *os coeficientes de x, y e z nessa equação são as coordenadas de um vetor normal*, na ordem adequada, e d é dado por (7).

Reciprocamente, se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral do plano π, mostraremos que $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π. Para isso, basta mostrar que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, para todo o vetor $\vec{v}$ paralelo a π, ou seja, que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, para quaisquer pontos A e B de π.

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. Se $A \in \pi$ e $B \in \pi$ temos

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

e

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0,$$

donde se obtém, subtraindo membro a membro, $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$, que é justamente o que queríamos, já que a expressão do primeiro membro é igual a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Conclusão Relativamente a um sistema ortogonal de coordenadas, os coeficientes de x, y e z de uma equação geral de um plano π são coordenadas de um vetor normal a π. Veremos nos próximos exercícios resolvidos, aplicações desse fato.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Está fixado um sistema *ortogonal* de coordenadas.

1. Obtenha uma equação geral do plano π, que passa pelo ponto $A = (1, 0, 2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1, -1, 4)$.

Resolução

Temos

$$X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$$

Então, pondo $X = (x, y, z)$, vem

$$X \in \pi \Leftrightarrow (x - 1, y - 0, z - 2) \cdot (1, -1, 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - y + 4z - 8 = 0$$

Logo $x - y + 4z - 9 = 0$ é uma equação geral de π.

Outro modo de resolver este exercício é o seguinte: se $\vec{n} = (1, -1, 4)$ é um vetor normal a π, então uma equação geral de π é da forma

$$x - y + 4z + d = 0$$

Para determinarmos d, basta lembrar que $A \in \pi$ e portanto suas coordenadas devem satisfazer a equação de π:

$$1 - 0 + 4.2 + d = 0,$$

e daí $d = -9$.

2. Obtenha uma equação geral do plano π que passa por $A = (0, 1, 2)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (4, 1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

Resolução

Já vimos (1º exercício resolvido do parágrafo anterior) como resolver este exercício mesmo que o sistema de coordenadas não seja ortogonal. Uma alternativa para quando o sistema é ortogonal é a seguinte.

Sendo

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}$$

temos que $\vec{n} = (-2, 6, 1)$ é um vetor normal a π (por quê?). Então

$$X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x, y-1, z-2) \cdot (-2, 6, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 6y - 6 + z - 2 = 0$$

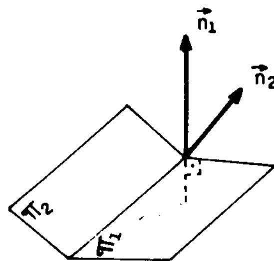
Logo, uma equação de π é $2x - 6y - z + 8 = 0$.

3. Escreva equações paramétricas para a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1 : 2x - y - 3 = 0$ e $\pi_2 : 3x + y + 2z - 1 = 0$.

Resolução

Os vetores $\vec{n}_1 = (2, -1, 0)$ e $\vec{n}_2 = (3, 1, 2)$ são normais, respectivamente, a π_1 e π_2.

Então, como r está contida em π_1 e em π_2, segue-se que $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais a r. Concluímos que $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ é um vetor diretor de r.



$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

Determinemos agora um ponto de r: fazendo $x = 0$ na equação de π_1, obtemos $y = -3$ e substituindo na equação de π_2, vem $z = 2$. Assim, o ponto $P = (0, -3, 2)$ pertence a π_1 e a π_2, e portanto a r. Conclusão: r passa por $P = (0, -3, 2)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (-2, -4, 5)$. Daí,

$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

são equações paramétricas de r.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Está fixado um sistema *ortogonal* de coordenadas.

1. Obtenha um vetor normal ao plano π nos seguintes casos:

   a) π passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$

   b) π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

   c) π tem equação geral $x - 2y + 4z + 1 = 0$

2. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo a $\pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0$.

3. Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.

4. Dê uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta r: $X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.

5. Decomponha o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ paralela e ortogonalmente ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

6. Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x + y - z = 2$.

7. Escreva equações paramétricas da reta interseção dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

8. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

9. Prove que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que são eqüidistantes de $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$ é um plano. Mostre em seguida que esse plano passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular ao segmento AB.

10. (Generalização do Exercício 9). Prove que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de dois pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado *plano mediador* do segmento AB.

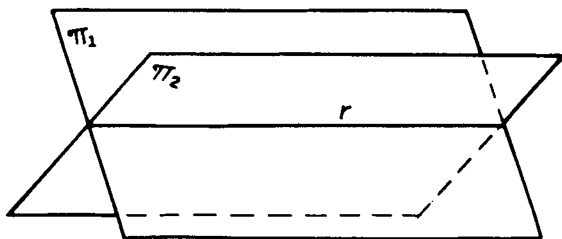
11. Mostre que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam dos pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, 2, 1)$ é uma reta, perpendicular ao plano que passa por A, B e C. Dê equações paramétricas dessa reta.

§ 4 Feixe de Planos

A noção que veremos agora é muito útil na resolução de problemas. Considere uma reta r interseção dos planos π_1 e π_2: $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Suponha que

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \qquad (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0) \tag{8}$$

$$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \qquad (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0) \tag{9}$$



O que representará a equação

$$\boxed{\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0} \tag{10}$$

onde α e β são números não ambos nulos $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$?

Se você escrever a equação acima na forma

$$(\alpha a_1 + \beta a_2) x + (\alpha b_1 + \beta b_2) y + (\alpha c_1 + \beta c_2) z + \alpha d_1 + \beta d_2 = 0 \tag{11}$$

e verificar que os coeficientes de x, y, z não podem ser simultaneamente nulos (veja o Exercício 2) então concluirá que (10) representa um plano π.

Qual a relação entre π, π_1 e π_2? Ora, todo ponto de $r = \pi_1 \cap \pi_2$ satisfaz (8) e (9), logo satisfaz também (10), e portanto (11). Conclusão: $r \subset \pi$.

Agora, se um plano contém r, será que existem α e β (não simultaneamente nulos) tais que a equação desse plano é (10)? A resposta é afirmativa. Veja o Exercício 3. Então concluímos que dados os planos

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0)$$

e

$$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \qquad (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0)$$

tais que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, o conjunto de *todos* os planos que contêm r é

$$\{\pi: \alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\}$$

Tal conjunto é chamado de *feixe* de planos por r.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dê uma equação do feixe de planos que contêm a reta

$$r: X = (1, -1, 0) + \lambda(2, -3, 4)$$

Resolução

Precisamos achar dois planos π_1 e π_2 cuja interseção é *r*. Para isto, achamos equações paramétricas de r:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Agora, eliminando λ das duas primeiras vem $3x + 2y - 1 = 0$. Da mesma forma, eliminando λ das duas últimas vem $4y + 3z + 4 = 0$. Então

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

Logo, um plano qualquer do feixe será dado por

$$\alpha(3x + 2y - 1) + \beta(4y + 3z + 4) = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

2. Ache o plano que contém o ponto $P = (1, 1, -3)$ e a reta

$$r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolução

O feixe de planos por r é dado por

$$\alpha(x - y + 2) + \beta(x + y + z) = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

Impondo que P pertença a esse plano genérico do feixe, vem

$$\alpha(1 - 1 + 2) + \beta(1 + 1 + (-3)) = 0$$

Logo $2\alpha - \beta = 0$, donde $\beta = 2\alpha$ ($\therefore \alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$). Substituindo na equação do feixe, vem $\alpha(x - y + 2) + 2\alpha(x + y + z) = 0$ ou $\alpha(3x + y + 2z + 2) = 0$. Como $\alpha \neq 0$, $3x + y + 2z + 2 = 0$, é uma equação do plano procurado.

3. Ache o plano π que contém a reta r do primeiro exercício e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (1, 2, 1)$ (suponha que o sistema de coordenadas é ortogonal).

Resolução

Segue do primeiro exercício que um plano que contém r terá equação da forma

$$\pi: 3\alpha x + (2\alpha + 4\beta)y + 3\beta z + (-\alpha + 4\beta) = 0$$

Sendo $\vec{u} \perp \pi$, devemos ter portanto $\vec{u} \,//\, (3\,\alpha,\ 2\,\alpha + 4\,\beta,\ 3\,\beta)$, isto é,

$$\begin{cases} 3\,\alpha = \lambda \\ 2\,\alpha + 4\beta = 2\,\lambda \\ 3\,\beta = \lambda \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Do sistema acima obtemos $\alpha = \beta$ e portanto $\pi : 3\alpha x + 6\,\alpha y + 3\,\alpha z + 3\,\alpha = 0$. Sendo $\alpha \neq 0$, dividimos por $3\,\alpha$:

$$\pi : x + 2y + z + 1 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e contém a reta

$$r:\ X = (0, 2, 2) + \lambda\,(1, 1, -1)$$

2. Prove que na equação (11), os coeficientes não podem ser simultaneamente nulos.

3. Prove que se $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e se $r \subset \pi$, existem α e β reais, não ambos nulos, tais que (10) é uma equação de π.

   Sugestão: O sistema formado pelas equações de π_1, π_2 e π é indeterminado. Como as duas primeiras são independentes, a terceira é combinação linear delas.

4. Obtenha uma equação geral do plano π, que contém o eixo dos x e é perpendicular à reta $r: X = (0, 1, 1) + \lambda\,(0, 2, 1)$ (sistema ortogonal).

5. Ache uma equação geral do plano π, que contém $r: X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 1, 1)$ e é perpendicular a $s:\ X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$ (sistema ortogonal).

CAPÍTULO 16

POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

Advertência Muito mais do que da memória você vai necessitar, neste capítulo, do seu bom senso.

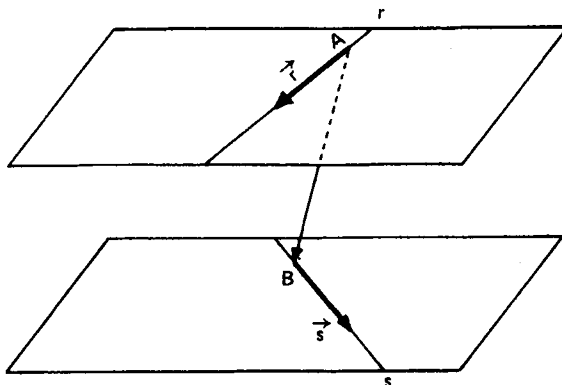
§ 1 Reta e Reta

Queremos neste parágrafo resolver o seguinte problema: dadas duas retas r e s, descobrir se elas são paralelas, concorrentes ou reversas; se forem paralelas, verificar ainda se são coincidentes ou distintas.

Para isso, fixemos um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, e designemos por $\vec{r} = (a, b, c)$ um vetor diretor de r, por $\vec{s} = (m, n, p)$ um vetor diretor de s, por $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer de r e por $B = (x_2, y_2, z_2)$ um ponto qualquer de s. Observemos então que:

- r e s são reversas se e somente se $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LI, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$



- r e s são paralelas se e somente se $(\vec{r}, \vec{s})$ é LD, isto é, se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{r} = \lambda \vec{s} \tag{2}$$

- r e s são concorrentes se e somente se são coplanares e não são paralelas, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad (\vec{r}, \vec{s}) \text{ LI} \tag{3}$$

A partir dessas considerações, podemos estabelecer o seguinte roteiro para estudar a posição relativa das retas r e s:

Roteiro

Escolher um vetor $\vec{r}$ paralelo a r e um vetor $\vec{s}$ paralelo a s. Temos duas possibilidades: $(\vec{r}, \vec{s})$ LI ou $(\vec{r}, \vec{s})$ LD.

1) Se $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI, escolher um ponto $A \in r$ e um ponto $B \in s$, e verificar se $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LI (condição (1)). Em caso afirmativo, r e s são *reversas*. Se, por outro lado, $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LD, estão obedecidas as condições (3) e r e s são concorrentes.

2) Se $(\vec{r}, \vec{s})$ é LD (condição (2)), r e s são paralelas. Resta saber se coincidem ou não. Para isso, basta escolher um ponto qualquer P de r e verificar se P pertence a s: se sim, temos $r = s$ (pois $r \parallel s$ e r e s tem um ponto em comum); se não, r e s são paralelas distintas ($r \cap s = \phi$ e $r \parallel s$).

Observação

Se r e s são concorrentes, o único ponto P comum a elas pode ser determinado resolvendo-se o sistema S constituído das equações de r e s. Aliás, o estudo da posição relativa pode também ser feito resolvendo-se esse sistema(*). Se S tiver uma única solução, r e s são concorrentes; se S for indeterminado (infinitas soluções) então $r = s$; se S for incompatível, dois casos podem ocorrer: as retas são reversas ou paralelas distintas (isso pode ser decidido tomando-se um vetor diretor de cada uma e verificando se são LI ou LD).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Estude a posição relativa das retas

$r: X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \ (\lambda \in \mathbb{R})$ e $s: X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) \ (\lambda \in \mathbb{R})$

Resolução

Temos $\vec{r} = (0, 1, 3)$, $\vec{s} = (1, 1, 1)$. Como se vê facilmente, $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI. Tomemos então um ponto em cada reta, por exemplo $A = (1, 2, 3) \in r$ e $B = (0, 1, 0) \in s$. Então $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -3)$ e como

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

concluímos que $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LI e portanto r e s são reversas.

(*) Cuidado! Não use a mesma letra para indicar os parâmetros; veja o Exercício 12 e a Observação 6 do Capítulo 14.

2. Estude a posição relativa das retas

$$r : X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ e } \quad s : X = (1, 3, 6) + \mu(0, 2, 6) \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Resolução

Temos $\vec{r} = (0, 1, 3)$ e $\vec{s} = (0, 2, 6)$. Logo, $\vec{s} = 2\vec{r}$ e portanto $(\vec{r}, \vec{s})$ é LD. Segue-se daí que r // s. Vejamos se r e s são distintas ou coincidentes. Para isso, tomamos um ponto qualquer de r, por exemplo, A = (1, 2, 3), e verificamos se $A \in s$. Ora, fazendo $\mu = -\frac{1}{2}$ na equação de s, obtemos:

$$X = (1, 3, 6) - \frac{1}{2}(0, 2, 6) = (1, 2, 3) = A$$

e portanto $A \in s$. Concluímos que r = s.

3. Estude a posição relativa das retas

$$r: X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$$

Resolução

O vetor $\vec{r} = (0, 1, 3)$ é paralelo a r. Para determinar um vetor $\vec{s}$ paralelo a s, tomemos dois pontos de s: fazendo z = 0 nas equações de s, obtemos x = 1 e y = 5; fazendo z = 1, obtemos x = 1 e y = 4; logo, B = (1, 5, 0) e C = (1, 4, 1) são pontos de s e portanto $\vec{s} = \overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)$ é um vetor diretor de s(*).

(*) Se o sistema de coordenadas fosse ortogonal, poderíamos obter $\vec{s}$ de outro modo:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

(por quê?)

Como $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI, as retas não são paralelas. Tomemos então o ponto A = (1, 2, 3) ∈ r; temos $\overrightarrow{AB} = (0, 3, -3)$ e sendo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

concluímos que $(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB})$ é LD. Logo r e s são coplanares; como não são paralelas, concluímos serem concorrentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

a) r: $X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ s: $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

b) r: $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

c) r: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ s: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

d) r: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{4} = z$ s: $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$

e) r: $X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ s: $X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$

f) r: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$ s: $x = -y = \dfrac{z-1}{4}$

g) r: $\dfrac{x+1}{2} = y = -z$ s: $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

h) r: $x + 3 = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3}$ s: $X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

2) Calcule $m \in \mathbb{R}$ para que

a) r e s sejam paralelas;

b) r, s e t sejam paralelas a um mesmo plano;

c) r e t sejam concorrentes;

d) s e t sejam coplanares;

e) r e s sejam reversas.

São dadas

$$r: \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \qquad s: \ x = \frac{y}{m} = z \qquad t: \ -x + z = y = -z - 1$$

3. No Exercício 1, obtenha, quando for o caso, uma equação geral para o plano determinado pelas retas r e s.

4. Nos itens do Exercício 1 em que r e s são reversas, obtenha uma equação geral para o plano que contém r e é paralelo a s.

5. Determine m para que as retas $r: X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$ e $s: X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$ sejam coplanares, e nesse caso estude sua posição relativa.

6. Determine α e β reais para que as retas

$$r: \ X = (1, \alpha, 0) + \lambda(1, 2, 1) \qquad e \qquad s: \begin{cases} x = z - 2 \\ y = \beta z - 1 \end{cases}$$

sejam coplanares e obtenha nesse caso uma equação geral para o plano delas.

§ 2 Reta e Plano

O problema que queremos resolver agora é: dados uma reta r e um plano π, decidir se r está contida em π ou se r é paralela a π ou se r é transversal a π, isto é, se r fura π num ponto P. Neste último caso, usamos o símbolo $r \pitchfork \pi$.

Lembrando que

- $r \subset \pi \iff r \cap \pi$ contém infinitos pontos
- $r \,//\, \pi \iff r \cap \pi = \phi$
- $r \pitchfork \pi \iff r \cap \pi$ contém um único ponto

devemos, para resolver o problema, estudar a interseção $r \cap \pi$.

Fixemos então um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e sejam, em relação a ele,

$$r: X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(m, n, p)$$

e

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

Vamos discutir o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x, y, z e λ;

$$\begin{cases} x = x_0 + m\lambda \\ y = y_0 + n\lambda \\ z = z_0 + p\lambda \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

ou equivalentemente:

$$\begin{cases} 1.x + 0y + 0z - m\lambda - x_0 = 0 \\ 0x + 1.y + 0z - n\lambda - y_0 = 0 \\ 0x + 0y + 1.z - p\lambda - z_0 = 0 \\ ax + by + cz + 0\lambda + d = 0 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, sabemos que este sistema tem solução única se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

e calculando o determinante, isso nos dá $ma + nb + pc \neq 0$. Concluímos que

$$\boxed{r \pitchfork \pi \iff ma + nb + pc \neq 0} \tag{4a}$$

ou, em outros termos,

$$\boxed{ma + nb + pc = 0 \iff r \subset \pi \quad \text{ou} \quad r \,//\, \pi} \tag{4b}$$

Podemos assim estabelecer o seguinte roteiro para estudar a posição relativa de uma reta r e um plano π.

Roteiro

1) Achar um vetor $\vec{v} = (m, n, p)$ paralelo à reta r e uma equação geral $ax + by + cz + d = 0$ para o plano π.

2) Se $am + bn + cp \neq 0$, a reta é transversal ao plano e para obter o ponto comum a eles, basta resolver o sistema formado por suas equações.

3) Se $am + bn + cp = 0$, podemos ter $r \subset \pi$ ou $r \,//\, \pi$. Para decidir isso, é suficiente escolher um ponto qualquer A de r e verificar se ele pertence a π. Se sim, $r \subset \pi$; se não, temos $r \,//\, \pi$.

Observações

1. Se o sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ for *ortogonal*, o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal ao plano π e o número $am + bn + cp$ é o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{n}$. A condição $am + bn + cp = 0$ significa, pois, que $\vec{n} \perp \vec{v}$. Temos assim uma interpretação geométrica para (4a) e (4b):

$$r \pitchfork \pi \iff \vec{v} \not\perp \vec{n}$$

$$r \subset \pi \quad \text{ou} \quad r \,//\, \pi \iff \vec{v} \perp \vec{n}$$

2. Se forem conhecidos dois vetores $\vec{u} = (d, e, f)$ e $\vec{w} = (g, h, i)$ linearmente independentes paralelos a π, e sendo, como antes, $\vec{v} = (m, n, p)$ um vetor diretor da reta r, uma condição necessária e suficiente para que r seja transversal a π é que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja LI, isto é,

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Faça uma figura para entender isso.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dados o plano

$$\pi: \ X = (1, 1, 3) + \lambda (1, -1, 1) + \mu (0, 1, 3)$$

e a reta

$$r: \ X = (1, 1, 1) + \alpha (3, 2, 1)$$

estude a posição relativa de r e π.

Primeira Resolução (veja a Observação 2)

Observemos os vetores $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 3)$, o primeiro paralelo a r, os dois últimos paralelos a π (e linearmente independentes). Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ é LI; logo, r é transversal a π.

Segunda Resolução (Veja o Roteiro)

Obtemos uma equação geral de π:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

donde

$$\pi: \ 4x + 3y - z - 4 = 0$$

Sendo $\vec{v} = (3, 2, 1)$ um diretor de r, e como $4.3 + 3.2 + (-1).1 = 17 \neq 0$ vemos que r é transversal a π.

2. Idem para

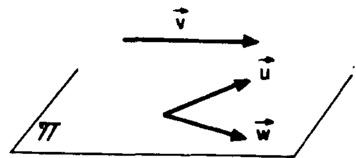
$$\pi : X = (1, 0, 1) + \lambda (1, 1, 1) + \mu (0, 0, 3),$$

$$r: X = (2, 2, 1) + \alpha (3, 3, 0).$$

Resolução

Os vetores $\vec{v} = (3, 3, 0)$, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (0, 0, 3)$, o primeiro paralelo a r, os outros dois paralelos a π (e linearmente independentes) são LD, pois

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$



Então, devemos ter $r \subset \pi$ ou $r \,//\, \pi$. Para decidir isso, tomamos um ponto qualquer de r e verificamos se ele pertence ou não a π. Fazendo $\alpha = 0$ na equação vetorial de r, obtemos o ponto $(2, 2, 1)$. Substituindo na equação de π:

$$(2, 2, 1) = (1, 0, 1) + \lambda (1, 1, 1) + \mu (0, 0, 3)$$

ou seja

$$\begin{cases} 2 = 1 + \lambda \\ 2 = \lambda \\ 1 = 1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

que é claramente incompatível. Logo, $r \,//\, \pi$.

3. Idem para

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi: \; x + y - z + 2 = 0$$

Resolução

Vemos pelas equações de r que $\vec{v} = (1, -1, 1)$ é um vetor diretor de r.

Como $1.1 + 1.(-1) + (-1).1 = -1 \neq 0$, concluímos que r é transversal a π.

4. Idem para

$$r: \; X = (1, 1, 0) + \lambda\,(1, -1, 1)$$

e

$$\pi: \; x + y - 2 = 0$$

Resolução

Sendo $\vec{v} = (1, -1, 1)$ um vetor diretor de r, e sendo $1.1 + 1.(-1) + 0.1 = 0$, temos por (4b) que $r \mathbin{/\!/} \pi$ ou $r \subset \pi$. Tomemos um ponto de r, por exemplo, $P = (1, 1, 0)$. Substituindo na equação de π, vemos que $P \in \pi$. Logo, $r \subset \pi$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos seguintes casos:

a) $r: \; X = (1, 1, 0) + \lambda\,(0, 1, 1), \quad \pi: \; x - y - z = 2$

b) $r: \dfrac{x-1}{2} = y = z, \quad \pi: \; X = (3, 0, 1) + \lambda\,(1, 0, 1) + \mu\,(2, 2, 0)$

c) $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$, $\pi: X = (0, \frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, -\frac{1}{2}, 0) + \mu(0, 1, 1)$

d) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $\pi: x + y = 2$

e) $r: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$
$\pi: X = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$

f) $r: \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$, $\pi: 3x - 6y - z = 0$

2. Calcule m para que a reta $r: X = (1, 1, 1) + \lambda(2, m, 1)$ seja paralela ao plano

$\pi: X = (0, 0, 0) + \alpha(1, 2, 0) + \beta(1, 0, 1)$.

3. Calcule $m, n \in \mathbb{R}$ para que a reta $r: X = (n, 2, 0) + \lambda(2, m, m)$ esteja contida no plano $\pi: x - 3y + z = 1$.

4. Calcule m para que a reta $r: \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja transversal ao plano $\pi: x + my + z = 0$.

5. Ache o ponto P onde r fura π nos casos dos Exercícios Resolvidos 1 e 3.

§ 3 Plano e Plano

O problema que se coloca agora é: dados os planos π_1 e π_2, decidir se $\pi_1 = \pi_2$, ou se π_1 e π_2 são paralelos distintos, ou se π_1 e π_2 são transversais (ou seja, concorrentes). Neste último caso, usaremos a notação $\pi_1 \pitchfork \pi_2$, e a interseção $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta.

Fixado um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, sejam $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ equações gerais de π_1 e π_2, respectivamente.

a) Se a_1, b_1, c_1, d_1 forem proporcionais a a_2, b_2, c_2, d_2, isto é, se existir $\lambda \neq 0$ tal que

$$a_1 = \lambda a_2, \qquad b_1 = \lambda b_2, \qquad c_1 = \lambda c_2 \qquad \text{e} \qquad d_1 = \lambda d_2$$

teremos $\pi_1: \lambda a_2 x + \lambda b_2 y + \lambda c_2 z + \lambda d_2 = 0$ e dividindo por λ, concluímos que $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ é também uma equação geral para π_1. Conclusão: $\pi_1 = \pi_2$ (todo ponto de π_1 satisfaz a equação de π_2 e reciprocamente).

b) Suponhamos agora que a_1, b_1, c_1, são proporcionais a a_2, b_2, c_2, mas que d_1 e d_2 não seguem essa proporcionalidade, isto é, que existe $\lambda \neq 0$ tal que $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, $c_1 = \lambda c_2$ e $d_1 \neq \lambda d_2$. Neste caso podemos escrever π_1: $\lambda a_2 x + \lambda b_2 y + \lambda c_2 z + d_1 = 0$ e portanto todo ponto $X = (x, y, z)$ de π_1 satisfaz

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = -\frac{d_1}{\lambda} \qquad (5)$$

Como todo ponto $X = (x, y, z)$ de π_2 satisfaz

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = -d_2 \qquad (6)$$

e $\dfrac{d_1}{\lambda} \neq d_2$, vemos claramente que nenhum ponto pode pertencer simultaneamente aos dois planos (o sistema das equações (5) e (6) é incompatível). Conclusão: $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ e π_1 e π_2 são paralelos distintos.

c) Se a_1, b_1, c_1, não são proporcionais a a_2, b_2, c_2 (e aqui não interessa analisar d_1 e d_2), concluímos, por exclusão, que $\pi_1 \pitchfork \pi_2$ e que $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta r. Já foi visto, no Exercício Resolvido nº 5 do § 2 do capítulo anterior, como obter equações paramétricas para *r*.

Resumindo, temos o seguinte roteiro para estudar a posição relativa dos planos π_1 e π_2, conhecidas suas equações gerais

$$\pi_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Roteiro

1) Se a_1, b_1, c_1, d_1 são proporcionais a a_2, b_2, c_2, d_2 (isto é, se uma das equações é "múltipla" da outra), temos $\pi_1 = \pi_2$.

2) Se a_1, b_1, c_1 são proporcionais a a_2, b_2, c_2 mas d_1 e d_2 não seguem essa proporção, então π_1 e π_2 são paralelos distintos.

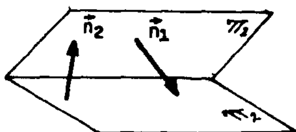
3) Se a_1, b_1, c_1 não são proporcionais a a_2, b_2, c_2, então $\pi_1 \pitchfork \pi_2$ e $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta.

Observações

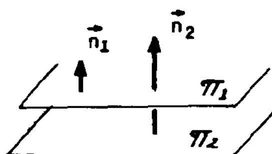
1. Poderíamos tratar de modo análogo o caso em que π_1, ou π_2 (ou ambos) são dados por equações paramétricas ou vetoriais. A diferença é que ao invés de um sistema de 2 equações a 3 incógnitas, poderíamos ter que analisar um sistema de 3 equações a 4 incógnitas. Sempre temos, no entanto, o recurso de passar inicialmente as equações para a forma geral. Exemplificaremos isso nos Exercícios Resolvidos.

2. Se o sistema de coordenadas é ortogonal temos uma forma geométrica de tirar as mesmas conclusões: os vetores $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são normais, respectivamente, a π_1 e π_2; logo

- Se $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ é LI, então $\pi_1 \pitchfork \pi_2$



- Se $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ é LD, então $\pi_1 \, // \, \pi_2$. Para decidir se são distintos ou coincidentes, basta escolher um ponto P qualquer de π_1 e verificar se P pertence a π_2.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Estude a posição relativa dos planos

$\pi_1 : X = (1, 0, 1) + \lambda (1, 1, 1) + \mu (0, 1, 0)$ e $\pi_2 : X = (0, 0, 0) + \alpha (1, 0, 1) + \beta (-1, 0, 3)$.

Resolução

Inicialmente, obtemos equações gerais para π_1 e π_2 (isso você já sabe fazer):

$$\pi_1 : x - z = 0 \qquad \pi_2 : y = 0$$

ou

$$\pi_1 : 1.x + 0.y + (-1) . z = 0 \qquad \pi_2 : 0.x + 1.y + 0.z = 0$$

Como 1, 0, −1 não são proporcionais a 0, 1, 0, temos que π_1 é transversal a π_2, e portanto $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta.

Se quisermos obter equações paramétricas para a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

basta, como já vimos no Capítulo 15, fazer (por exemplo) $z = \lambda$ e teremos

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. Estude a posição relativa dos planos

$$\pi_1:\ 2x - y + z - 1 = 0 \quad e$$

e

$$\pi_2:\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 9 = 0.$$

Resolução

Cada coeficiente da equação de π_1 é o dobro do seu correspondente na equação de π_2, exceto o termo independente. Logo, este caso encaixa-se no item 2 do Roteiro e portanto π_1 e π_2 são paralelos distintos.

3. Idem para $\pi_1:\ x + 10y - z = 4$, $\pi_2:\ 4x + 40y - 4z = 16$.

Resolução

Multiplicando por 4 ambos os membros da equação de π_1 obtém-se a equação de π_2. Logo, $\pi_1 = \pi_2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Estude a posição relativa de π_1 e π_2 nos seguintes casos:

a) $\pi_1:\ X = (1, 1, 1) + \lambda (0, 1, 1) + \mu (-1, 2, 1)$
$\pi_2:\ X = (1, 0, 0) + \lambda (1, -1, 0) + \mu (-1, -1, -2)$

b) $\pi_1:\ 2x - y + 2z - 1 = 0$
$\pi_2:\ 4x - 2y + 4z = 0$

c) $\pi_1:\ x - y + 2z - 2 = 0$
$\pi_2:\ X = (0, 0, 1) + \lambda (1, 0, 3) + \mu (-1, 1, 1)$

2. Calcule m para que os planos

$$\pi_1: X = (1, 1, 0) + \lambda (m, 1, 1) + \mu (1, 1, m)$$

e

$$\pi_2: 2x + 3y + 2z + n = 0$$

sejam paralelos distintos, nos casos:

a) $n = -5$ b) $n = 1$

3. Mostre que os planos

$$\pi_1: X = (0, 0, 0) + \lambda(-1, m, 1) + \mu(2, 0, 1)$$

$$\pi_2: X = (1, 2, 3) + \alpha(m, 1, 0) + \beta(1, 0, m)$$

são transversais, para todo $m \in \mathbb{R}$.

4. Desenvolva um método para estudar a posição relativa dos planos $\pi_1: X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ e $\pi_2: X = B + \lambda\vec{t} + \mu\vec{w}$, sem passar suas equações para a forma geral.
Sugestão: Discuta a dependência linear das triplas $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

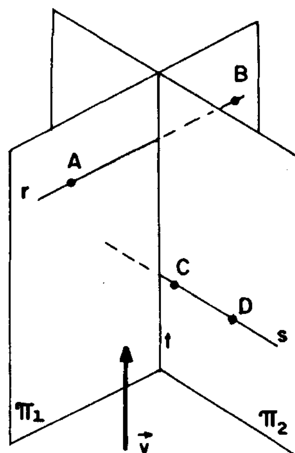
§ 4 Miscelânea de Exercícios

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sejam r e s as retas reversas, passando por A e B e por C e D respectivamente. Obtenha uma equação vetorial da reta t, concorrente com r e s, e paralela ao vetor $\vec{v} = (1, -5, -1)$. Dados: $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-3, 1, -4)$ e $D = (-1, 2, -7)$.

Primeira Resolução (geométrica)

Pode-se demonstrar (faça isso) que a reta procurada é a interseção dos planos π_1 e π_2, sendo π_1 o plano que contém r e é paralelo a $\vec{v}$ e π_2 o plano que contém s e é paralelo a $\vec{v}$. Caso esses planos não sejam transversais, não existe a reta procurada (prove). Como π_1 passa por A e tem vetores diretores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB}$, uma equação geral de π_1 é:



$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\pi_1 : y - 5z = 1$$

Por outro lado, π_2 passa por C e tem vetores diretores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{CD}$. Logo,

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+4 \\ 1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\pi_2 : 16x + y + 11z + 91 = 0$$

Vê-se facilmente que π_1 e π_2 são transversais, e portanto a reta procurada é

$$t: \begin{cases} y - 5z = 1 \\ 16x + y + 11z + 91 = 0 \end{cases}$$

que tem

$$X = (-\frac{23}{4}, 1, 0) + \lambda (1, -5, -1)$$

por equação vetorial.

Segunda Resolução (algébrica)

Sejam M e N, respectivamente, os pontos onde a reta procurada concorre com r e s. A partir das equações paramétricas (ou vetoriais) de r e s, podemos escrever as coordenadas de M em função de um parâmetro λ e as de N em função de um parâmetro μ (cuidado! não use a mesma letra!). Como M e N pertencem à reta t, devemos ter $(\overrightarrow{MN}, \vec{v})$ LD, ou seja, deve existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{MN} = \alpha \vec{v}$.

Essa igualdade fornece um sistema de três equações nas incógnitas λ, μ, α, o que permite determinar um ponto de t (M ou N). Com um ponto e um diretor ($\vec{v}$) de t, escrevemos suas equações. Se o sistema for incompatível, não existe a reta t. Vejamos:

Equações vetoriais:

$$r: X = (0, 1, 0) + \lambda (1, 0, 0)$$

$$s: X = (-3, 1, -4) + \mu (2, 1, -3)$$

$$M \in r \Rightarrow M = (\lambda, 1, 0)$$

$$N \in s \Rightarrow N = (-3 + 2\mu, 1 + \mu, -4 - 3\mu)$$

Impondo que $\overrightarrow{MN} = \alpha\vec{v}$ chegamos ao sistema

$$\begin{cases} -3 + 2\mu - \lambda = \alpha \\ \mu = -5\alpha \\ -4 - 3\mu = -\alpha \end{cases}$$

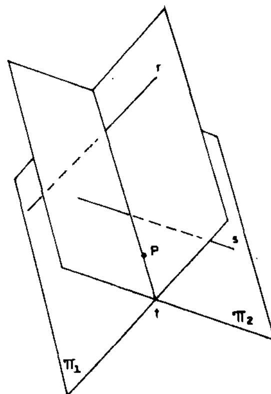
que resolvido fornece $\lambda = -\frac{23}{4}$, $\mu = -\frac{5}{4}$, $\alpha = \frac{1}{4}$. Logo, $M = (-\frac{23}{4}, 1, 0)$. Então $t: X = (-\frac{23}{4}, 1, 0) + \beta (1, -5, -1)$.

2. Obtenha uma equação vetorial da reta t, que passa pelo ponto P = (2, −1, 1) e é concorrente com as retas reversas

$$r: \begin{cases} y + z = 5 \\ x + 2z = 9 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Primeira Resolução (Geométrica)

Verifique inicialmente que $P \notin r$ e $P \notin s$ (o que aconteceria se $P \in R$ ou $P \in s$?). Sejam π_1, o plano determinado por r e P e π_2, o plano determinado por s e P. Se r não for paralela a π_2, nem s a π_1, a reta t procurada é $\pi_1 \cap \pi_2$ (isso pode ser demonstrado). Então: fazendo $z = \lambda$ nas equações de r e $x = \mu$ nas de s, obtemos:



$$r: \begin{cases} x = 9 - 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 4\mu + 3 \\ z = 2\mu + 1 \end{cases}$$

e portanto:

$$A = (9, 5, 0) \in r, \quad \vec{u} = (-2, -1, 1) \,//\, r$$
$$B = (0, 3, 1) \in s, \quad \vec{v} = (1, 4, 2) \,//\, s$$

Daí segue que π_1 passa por $P = (2, -1, 1)$ e é paralelo a $\vec{u}$ e a $\overrightarrow{PA} = (7, 6, -1)$. Logo:

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\pi_1: x - y + z - 4 = 0$$

Vemos então que s é transversal a π_1, já que $1 \,.\, 1 + (-1) \,.\, 4 + 1 \,.\, 2 = -1 \neq 0$. Quanto a π_2, este passa por P e é paralelo a $\vec{v}$ e a $\vec{w} = (-1, 2, 0)$ (note que $\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$). Logo,

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\pi_2: 2x + y - 3z = 0$$

Vemos então que r é transversal a π_2, uma vez que $2.(-2) + 1.(-1) + (-3).1 = -8 \neq 0$. A solução é portanto, a reta $\pi_1 \cap \pi_2$:

$$t: \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

que tem equação vetorial $X = (0, -6, -2) + \lambda(2, 5, 3)$.

Segunda Resolução (algébrica)

Sejam A e B, respectivamente, os pontos onde a reta procurada concorre com r e s. A partir de equações paramétricas ou vetoriais de r e s, podemos escrever as coordenadas de A em função de um parâmetro λ e as de B em função de um parâmetro μ. Como A, B e P pertencem à reta t, deve existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PA} = \alpha\overrightarrow{PB}$. Das equações paramétricas de r e s, já obtidas na Primeira Resolução, obtemos:

$$A = (9 - 2\lambda, 5 - \lambda, \lambda) \qquad B = (\mu, 3 + 4\mu, 1 + 2\mu)$$

Substituindo na relação acima, vem

$$(7 - 2\lambda, 6 - \lambda, \lambda - 1) = \alpha(\mu - 2, 4 + 4\mu, 2\mu)$$

Obtemos assim o sistema

$$\begin{cases} 7 - 2\lambda = \alpha\mu - 2\alpha \\ 6 - \lambda = 4\alpha + 4\alpha\mu \\ \lambda - 1 = 2\alpha\mu \end{cases}$$

que, resolvido, fornece

$$\lambda = \frac{23}{8}, \qquad \mu = -6, \qquad \alpha = -\frac{5}{32} \; .$$

Logo, B = (-6, -21, -11) e $\overrightarrow{PB}$ = (-8, -20, -12). Então $\vec{v} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$ = (2, 5, 3) é um vetor diretor da reta procurada e

$$t : X = (2, -1, 1) + \beta(2, 5, 3)$$

Observação Final

O método algébrico utilizado para resolver os Exercícios 1 e 2 é uma ótima ilustração daquilo que foi dito no Prefácio a respeito do método *analítico* de estudo da Geometria. Cremos então ser a hora de convidá-lo a reler com atenção aquele Prefácio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Está fixado um sistema ortogonal de coordenadas nos Exercícios 10, 11, 12, 14, 17, 25, 27 e 28.

1. Obtenha uma equação vetorial para a reta t, que passa por P e é concorrente com r e s, nos seguintes casos (interprete geometricamente os resultados):

a) P = (1, 1, 1) $\quad r: x + 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ $\quad s: X = (-2, 0, 4) + \lambda(1, 1, -1)$

b) P = (-2, 2, -4) $\quad r: X = (-1, 1, 3) + \lambda(-2, -2, 2)$ $\quad s: X = (-2, 4, 4) + \lambda(1, 2, 3)$

c) P = (1, 0, 6) $\quad r: \begin{cases} x - y - z + 5 = 0 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{cases}$ $\quad s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$

d) P = (1, -2, -1) $\quad r: \begin{cases} z = x - 2 \\ y = 1 - x \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} z = x - 1 \\ y = 1 + 2x \end{cases}$

e) P = (1, 0, 3) $\quad r: X = (1, 0, 0) + \lambda(3, -1, 2)$ $\quad s: X = (-5, 2, -4) + \lambda(1, 5, -1)$

2. Obtenha uma equação vetorial para a reta t, concorrente com r e s, nos seguintes casos (interprete geometricamente os resultados):

a) r: $X = (1, 1, -1) + \lambda\,(2, 1, -1)$ s: $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

e t é paralela à reta determinada por $M = (1, -1, 4)$ e $N = (0, -3, -1)$.

b) r: $\dfrac{x+1}{2} = y = -z$ s: $X = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 0) + \lambda\,(5, 4, 3)$

e t é paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 0, 1)$

c) r: $X = (1, 2, 3) + \lambda\,(2, -1, 0)$ s: $X = (0, 1, -3) + \lambda\,(1, -1, -2)$

e t é paralela à reta

h: $X = (0, 0, 0) + \lambda\,(\dfrac{43}{9}, \dfrac{86}{27}, \dfrac{-43}{27})$

3. Obtenha uma equação vetorial para a reta que passa pelo ponto P, é paralela ou contida no plano π, e concorrente com a reta r nos seguintes casos (interprete geometricamente):

a) $P = (1, 1, 0)$ π: $2x + y - z - 3 = 0$ r: $X = (1, 0, 0) + \lambda\,(-1, 0, 1)$

b) $P = (1, 0, 1)$ π: $x - 3y - z = 1$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda\,(2, 1, -1)$

c) $P = (1, 2, 1)$ π: $x \quad y = 0$ r: $X = (1, 0, 0) + \lambda\,(2, 2, 1)$

4. Obtenha uma equação vetorial para a reta t, contida no plano π: $x - y + z = 0$, e que é concorrente com as retas

r: $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x = y \end{cases}$ e s: $\begin{cases} z = x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$

5. Obtenha uma equação vetorial da reta t, paralela aos planos α e β, e concorrente com as retas r e s, sendo

r: $x - 2y = z - x = y + 1$ s: $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

α: $x + 2y + z - 1 = 0$ e β: $x + 4y + 2z = 0$.

6. Obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta r: $X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ e é paralelo à reta s: $\frac{x+1}{2} = y = z + 3$.

7. Obtenha uma equação geral para o plano que passa pelo ponto $P = (1, 3, 4)$ e é paralelo ao plano $\pi: x + y + z + 1 = 0$.

8. Dê uma equação vetorial da reta h, paralela ao plano $\pi: x + y + z = 0$, concorrente com as retas $r: X = (0, 0, 2) + \alpha(1, 1, 1)$, $s: X = (2, 0, -5) + \beta(0, 1, 1)$ e $t: X = (-3, -3, 3) + \gamma(1, 0, 2)$.

9. Existe alguma reta paralela à reta r: $X = (0, 1, 1) + \lambda(1, -1, -1)$, contida no plano $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$? Por quê? E paralela ao eixo das abscissas?

10. Considere os planos $\pi_1: 2x = y$, $\pi_2: x = 0$, $\pi_3: z = 0$, e seja π_4 o plano determinado pelas retas

$$r: X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 2, -1) \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

Verifique se esses planos determinam um tetraedro e calcule o seu volume.

11. Calcule o volume do tetraedro determinado pelas retas r, s, e t e pelo plano π. São dados $\pi: x + y + z - 5 = 0$, $r: x = z = 0$, $s: x = y = 0$ e $t: x - 2y = z = 0$.

12. Verifique se as retas r, s, t e o plano π determinam um tetraedro e calcule seu volume.

Dados: $\pi: x + y - z + 1 = 0$, $r: \begin{cases} x = y \\ x = z + 1 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ $t: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

13. Um paralelogramo de vértices A, B, C, D, tem lados AB e CD paralelos à reta de equação r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(3, 4, 5)$ e os outros dois paralelos ao plano $\pi: x + y + 3z = 0$. Conhecendo os vértices A e D, determine os vértices B e C. Dados: $A = (0, 0, 0)$ e $D = (1, 1, 1)$.

14. Considere as retas r: $X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$ e s: $\frac{x-1}{2} = y = z$. Seja A o ponto onde s fura o plano π, e B e C respectivamente os pontos onde r fura os planos Oxz e Oxy. Calcule a área do triângulo ABC nos seguintes casos:

a) $\pi : x - y + z = 2$

b) $\pi : x - y - z = 2$

c) $\pi : x - 4y + 2z = 1$

15. Projete o ponto $P = (1, 4, 0)$ sobre o plano π: $x + y - 2z + 1 = 0$, paralelamente à reta $r: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$.

16. Sendo π: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, -1) + \mu\ (3, 0, -1)$, r: $X = (1, 0, 0) + \gamma\ (2, 1, 0)$, e $P = (2, 2, 1)$ existe uma reta concorrente com r, passando por P e paralela a π? Por quê?

17. Dados os planos $\pi_1: x - y = 0$, $\pi_2: x + z = 0$ e $\pi_3: x - y + 3z + 3 = 0$, mostre que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um ponto A (determine-o). Em seguida, calcule o volume do paralelepípedo que tem diagonal AH ($H = (2, 1, 3)$) e três faces contidas nos planos dados.

18. Dadas as retas r e s e o ponto P, verifique em cada um dos casos seguintes se existe uma reta t passando por P e concorrente com r e s nos pontos A e B de tal modo que os segmentos AP e BP sejam congruentes; se for o caso, obtenha uma equação vetorial para t. Interprete geometricamente os resultados.

a) $P = (1, -1, -9)$ r: $X = (0, -4, 1) + \lambda(2, 1, 0)$ s: $X = (0, -3, -3) + \mu(1, 0, 2)$

b) $P = (1, 2, 3)$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1)$ s: $X = (1, 1, 1) + \mu(2, 1, 1)$

19. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que se apoiam nas retas r e s e interprete geometricamente, nos seguintes casos:

a) r: $X = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 1)$ s: $X = (0, 0, 0) + \mu(1, 0, 1)$

b) r: $X = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 3)$ s: $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

c) r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$
s: $X = (0, 0, 1) + \mu(2, 1, 1)$

20. Obtenha nos casos do exercício anterior, equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos paralelos ao segmento AB, que se apoiam nas retas r e s. São dados: $A = (1, 2, 7)$ e $B = (1, 1, 4)$. Interprete geometricamente.

21. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que se apoiam nos planos π_1 e π_2 e interprete geometricamente, nos seguintes casos:

a) π_1: $2x - 3y + 3z - 4 = 0$ $\qquad$ π_2: $x + y - z + 2 = 0$

b) π_1: $x - y + 3z = 0$ $\qquad$ π_2: $x - y + 3z - 1 = 0$

22. Obtenha, nos casos do exercício anterior, equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos paralelos ao segmento AB, que se apoiam nos planos π_1 e π_2. Interprete geometricamente. São dados: $A = (1, 4, 0)$ e $B = (0, 1, -2)$.

23. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que se apoiam na reta r e no plano π, e interprete geometricamente, nos seguintes casos:

a) π: $x - 2y - z = 1$ $\qquad$ r: $X = (1, 0, 2) + \lambda(2, -1, 4)$

b) π: $x + y + z = 0$ $\qquad$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$

c) π: $x - 2y - z = 0$ $\qquad$ r: $X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1)$

24. Nos casos do exercício anterior, obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos paralelos ao segmento AB e que se apoiam em r e π. Interprete geometricamente. Dados: $A = (1, 0, 1)$ e $B = (1, 2, 3)$.

25. Sejam $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 2, 1)$ e π: $X = (2, 4, 0) + \alpha(-1, 1, 1) + \beta(-2, -1, 0)$. Mostre que o lugar geométrico dos pontos X do plano π, tais que o tetraedro ABCX tenha volume 1, é a reunião de duas retas paralelas, contidas em π; obtenha equações vetoriais para elas.

26. Dadas as retas r: $X = (1, 0, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, s: $X = (0, 2, 0) + \beta(1, 0, 1)$, t: $X = (0, 0, 3) + \gamma(1, 1, 0)$, seja h a reta concorrente com r, s e t nos pontos A, B e C respectivamente, de tal modo que B seja o ponto médio de AC. Determine os pontos A, B e C e uma equação vetorial de h.

27. Dada a reta r: $x - y = x + z - 1 = 0$, seja π um plano que contém r e determina com os três planos coordenados um tetraedro de volume $V = \frac{1}{12}$. Determine os vértices do tetraedro e uma equação geral de π.

28. Dados os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (0, 0, 3)$ e $O = (0, 0, 0)$, sejam r, s e t as retas que passam respectivamente por O e A, O e B, O e C. Obtenha uma equação geral do plano π, paralelo ao plano que passa por A, B e C, de modo que o triângulo $A'B'C'$ tenha área $\frac{7}{8}$, sendo A', B' e C' os pontos onde as retas r, s e t furam π.

CAPÍTULO 17

PERPENDICULARISMO E ORTOGONALIDADE

Nos capítulos anteriores, a não ser em raras ocasiões, não foi necessário supor que o sistema de coordenadas fosse ortogonal. Neste capítulo e nos seguintes, porém, isso é essencial. Então, *salvo menção em contrário, estaremos sempre utilizando um sistema ortogonal de coordenadas* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Preste atenção para descobrir *onde* surge a necessidade disso.

§1 Reta e Reta

Para decidir se duas retas são ou não ortogonais, tomamos vetores paralelos a elas e verificamos se estes são ou não ortogonais.

Atenção

Há diferença entre os termos *retas ortogonais* e *retas perpendiculares!* Retas ortogonais podem ser concorrentes ou reversas, enquanto que retas perpendiculares são obrigatoriamente concorrentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique se as retas

$$r: X = (1, 1, 1) + \lambda (2, 1, -3) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$s: X = (0, 1, 0) + \lambda (-1, 2, 0) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

são ortogonais. Verifique também se são perpendiculares.

Resolução

Temos

$$(2, 1, -3) \cdot (-1, 2, 0) = 2(-1) + 1.2 + (-3) . 0 = 0$$

logo, r e s são ortogonais. Para verificar se são perpendiculares, basta verificar agora se são concorrentes. Para isso, segundo o que vimos no Capítulo 16, §1, é suficiente resolver o sistema das equações de r e s. Um outro modo é verificar se r e s são coplanares (e se forem, serão perpendiculares). Vejamos:

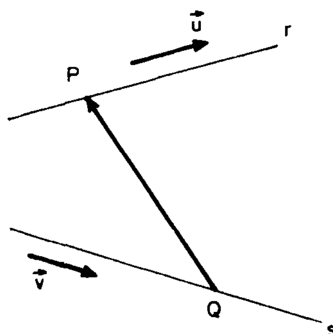
$P = (1, 1, 1) \in r$

$Q = (0, 1, 0) \in s$

$\overrightarrow{QP} = (1, 0, 1)$

$\vec{u} = (2, 1, -3)$ é um diretor de r

$\vec{v} = (-1, 2, 0)$ é um diretor de s.



Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{QP}$ são LI e portanto r e s são reversas; logo não são perpendiculares.

2. Idem para

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Resolução

Devemos achar vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, diretores de r e s, respectivamente. Conforme o Exercício Resolvido nº 3, §3 do Capítulo 15,

$$\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0, 4, 2)$$

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0 + 4 - 2 = 2 \neq 0$, as retas r e s não são ortogonais.

3. Ache equações paramétricas da reta r que passa por P = (−1, 3, 1) e é perpendicular à reta $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.

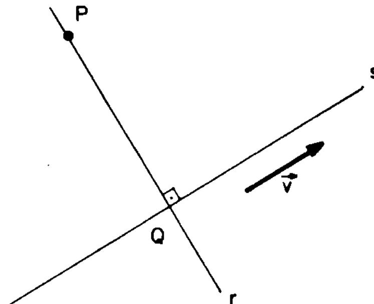
Resolução

Vamos procurar o ponto Q, comum a r e a s (o pé da perpendicular). Obtenhamos inicialmente equações paramétricas para s. De

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z = \lambda$$

vem:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$



Como Q pertence a s, temos $Q = (1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda, \lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e portanto

$$\overrightarrow{PQ} = (2 + 2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda - 1) \qquad (\alpha)$$

Sendo $\vec{v} = (2, 3, 1)$ um vetor diretor de s, devemos ter $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$. Então

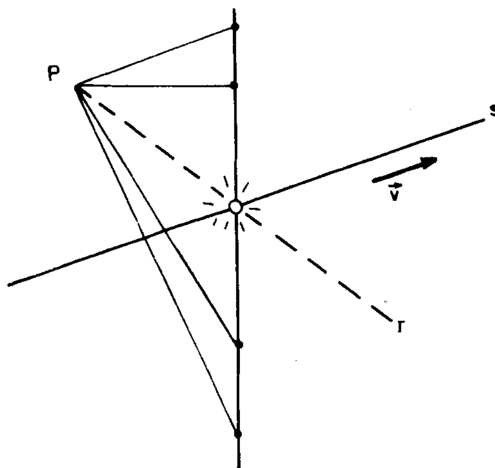
$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = (2 + 2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda - 1) \cdot (2, 3, 1) = 4 + 4\lambda - 6 + 9\lambda + \lambda - 1$$

donde $\lambda = \frac{3}{14}$. Levando a (α), vem $\overrightarrow{PQ} = (\frac{34}{14}, \frac{-19}{14}, \frac{-11}{14})$. Então r é dada por

$$\begin{cases} x = -1 + 34\mu \\ y = \ \ 3 - 19\mu \\ z = \ \ 1 - 11\mu \end{cases}$$

Atenção

Evite o erro seguinte: tomar um vetor qualquer ortogonal a $\vec{v}$ para ser vetor diretor de r. É preciso ter muito boa pontaria para acertar a reta s, "chutando" *um* dentre os infinitos vetores ortogonais a $\vec{v}$!



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verifique se as retas r e s são ortogonais; em caso afirmativo, se são também perpendiculares.

a) r: $X = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1)$ s: $X = (2, 4, 4) + \lambda(-1, 1, -1)$

b) $r: X = (0, 1, 0) + \lambda(3, 1, 4)$ $\quad$ $s: X = (-1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$

c) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}$ $\quad$ $s: X = (1, 3, 0) + \lambda(0, -7, 5)$

d) $r: x + 3 = y = \frac{z}{3}$ $\quad$ $s: \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = -z$

e) $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ $\quad$ $s: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{-5}$

2. Dê equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a r nos casos

a) $P = (2, 6, 1)$ $\quad$ $r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

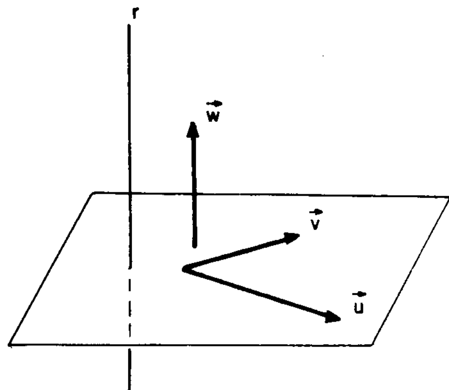
b) $P = (1, 0, 1)$ $\quad$ r passa por $A = (0, 0, -1)$ e $B = (1, 0, 0)$

3. Ache equações sob forma simétrica da reta perpendicular comum às retas reversas

$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

4. Dê uma equação vetorial da reta paralela ao plano π, perpendicular à reta AB, e que intercepta a reta s, sendo $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $s: X = (4, 5, 0) + \lambda(3, 6, 1)$.

§2 **Reta e Plano**



Para decidir se uma reta r e um plano π são perpendiculares, podemos proceder assim: sendo $\vec{w} \neq \vec{0}$ paralelo a r, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente independentes e paralelos a π, então r $\perp$ π se e somente se $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.

Caso o plano seja dado por uma equação geral

$$\pi:\ ax + by + cz + d = 0$$

então, como (a, b, c) é normal a π, basta verificarmos se este vetor é paralelo a $\vec{w}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar se r e π são perpendiculares, sendo

$$r : X = (0, 1, 0) + \lambda (1, 1, 3) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\pi : X = (3, 4, 5) + \lambda (6, 7, 8) + \mu (9, 10, 11) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Resolução

$$\vec{n} = (6, 7, 8) \wedge (9, 10, 11) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = (-3, 6, -3)$$

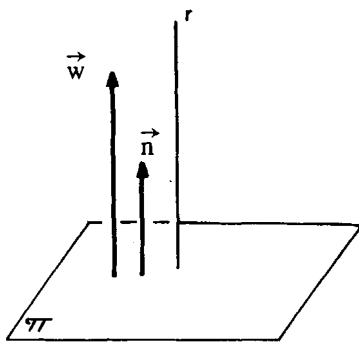
é normal a π. O vetor $\vec{w} = (1, 1, 3)$, paralelo a r, não é paralelo a $\vec{n}$, como é fácil ver. Logo r $\not\perp$ π.

2. Idem para $\pi:\ x + 2z = 14$ e r: $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$

Resolução

Um vetor paralelo a r é

$$\vec{w} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (2, -1, -1) \wedge (2, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 0, 4)$$



Um vetor normal a π é $\vec{n} = (1, 0, 2)$. Como $\vec{w} = 2\vec{n}$, vemos que $r \perp \pi$.

3. Ache equações na forma simétrica da reta r que passa por $P = (-1, 3, 5)$ e é perpendicular ao plano $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$.

Resolução

Um vetor diretor de r é o vetor $\vec{n} = (1, -1, 2)$, normal a π. Então

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verifique se r é perpendicular a π nos casos

a) $r: X = (3, 1, 4) + \lambda(1, -1, 1)$ $\quad \pi: X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, 1, 1)$

b) $r: X = (3, 1, 4) + \lambda(-1, 0, 1)$ $\quad \pi: X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 0) + \mu(1, 1, 1)$

c) r: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ π: $6x - 6y + 2z - 1 = 0$

d) r: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ π: $x - y + z = 1$

e) r: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ π: $2x - 2y + 4z = 1$

2. Ache equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular ao plano π nos casos:

a) $P = (1, -1, 0)$ π: $X = (1, -1, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1)$

b) $P = (1, 3, 7)$ π: $2x - y + z = 6$

3. Ache uma equação geral do plano π que passa por P e é perpendicular à reta r nos seguintes casos:

a) $P = (0, 1, -1)$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, 1)$

b) $P = (1, 1, -1)$ r: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

c) $P = (0, 0, 0)$ r passa por $A = (1, -1, 1)$ e $B = (-1, 1, -1)$.

4. Ache o simétrico de P em relação ao plano π nos casos seguintes:

a) $P = (1, 4, 2)$ π: $x - y + z - 2 = 0$

b) $P = (1, 1, 1)$ π: $4y - 2z + 3 = 0$

5. Ache o simétrico de P em relação à reta r nos seguintes casos:

a) $P = (0. 2, 1)$ $\quad$ $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)$

b) $P = (1, 1, -1)$ $\quad$ $r: \frac{x+2}{3} = y = z$

c) $P = (0, 0, -1)$ $\quad$ $r: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$

6. Determine a projeção ortogonal

a) do ponto $P = (4, 0, 1)$ sobre o plano $\pi: 3x - 4y + 2 = 0$

b) da reta $r: x + 1 = y + 2 = 3z - 3$ sobre o plano $\pi: x - y + 2z = 0$

c) da origem sobre a reta interseção dos planos $\pi_1: x + y + z = 1$ e

$$\pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$$

7. Ache equações paramétricas da reta r', simétrica da reta r em relação ao plano π, sendo r determinada por $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, -1, -1)$ e π dado por $x + y - z = 3$

8. Dados os planos $\pi_1: x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2: x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $(1, 1, -1)$.

9. Ache o vértice B de um triângulo retângulo ABC sabendo que

(i) $A = (1, 1, 1)$ e a cota de C é maior do que a de A;

(ii) a hipotenusa AC é ortogonal ao plano $x + y - z - 10 = 0$, e mede $\sqrt{3}$;

(iii) o lado AB é ortogonal ao plano $2x - y - z = 0$

10. Ache equações na forma simétrica da reta perpendicular às retas

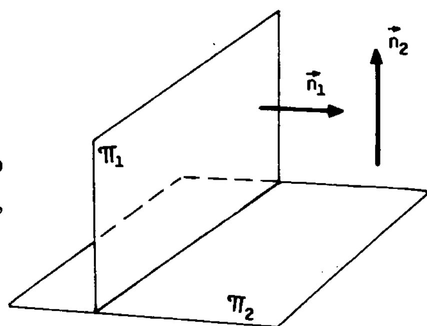
$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

e que passa pela interseção de r e s.

11. O vértice de uma pirâmide regular é $P = (\sqrt{2}, 2, 0)$ e sua base é um quadrado ABCD contido no plano $\pi: x - z = 0$. Sendo $A = (0, 2, 0)$, determine os outros três vértices e o volume da pirâmide.

§3 **Plano e Plano**

Se $\vec{n}_1$ é normal ao plano π_1, $\vec{n}_2$ é normal ao plano π_2, então, $\pi_1 \perp \pi_2$ se e somente se $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, como é claro.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

Verificar se são perpendiculares os planos

$$\pi_1: X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, -1, 1)$$

$$\pi_2: 2x - 7y + 16z = 40$$

Resolução

Um vetor normal a π_1 é

$$\vec{n}_1 = (1, 0, 1) \wedge (-1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -1)$$

Um vetor normal a π_2 é $\vec{n}_2 = (2, -7, 16)$. Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, -2, -1) \cdot (2, -7, 16) = 0$, resulta que $\pi_1 \perp \pi_2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verifique se os planos dados são perpendiculares nos casos:

   a) $X = (1, -3, 4) + \lambda (1, 0, 3) + \mu (0, 1, 3)$

   $X = (0, 0, 0) + \lambda (1, 1, 6) + \mu (1, -1, 0)$

   b) $X = (1, 1, 1) + \lambda (-1, 0, -1) + \mu (4, 1, 1)$

   $X = (3, 1, 1) + \lambda (1, -3, -1) + \mu (3, 1, 0)$

   c) $X = (4, 3, 1) + \lambda (-1, 0, -1) + \mu (3, 1, 0$ $\qquad y - 3z = 10$

   d) $x + y - z - 2 = 0$ $\qquad 4x - 2y + 2z = 0$

2. Ache uma equação geral do plano por $(2, 1, 0)$ que é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

3. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0$, ache uma equação do plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3.

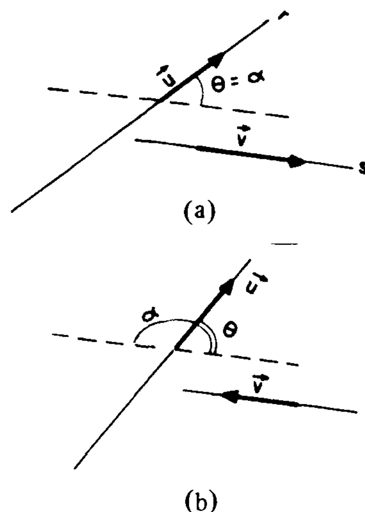
4. Um cubo tem diagonal AB e uma de suas faces está contida no plano $\pi: x - y = 0$. Determine seus vértices, dados $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 3, \sqrt{2})$.

5. Um hexágono regular ABCDEF está contido no plano $\pi: x + y + z - 1 = 0$. Sendo $A = (1, 0, 0)$ e $D = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ dois vértices diametralmente opostos, determine os outros quatro.

CAPÍTULO 18

ÂNGULOS

Neste capítulo, todos os sistemas de coordenadas são ortogonais.



(a)

(b)

§1 Ângulo entre Retas

Dadas as retas r e s (não ortogonais), queremos achar a medida θ do ângulo agudo entre elas. Para isso, tomemos $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, respectivamente paralelos a r e a s. Sendo α a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

Analisemos o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então $\cos\alpha > 0$, donde $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, e $\theta = \alpha$ (veja a Figura (a)). Logo

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

- Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então $\cos\alpha < 0$, donde $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, e neste caso $\theta + \alpha = \pi$ (veja Figura (b)).

Logo

$$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Em qualquer caso,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}}$$

Observação

Salvo menção em contrário, o ângulo entre duas retas será considerado sempre como sendo o agudo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre as retas r: $X = (1, 1, 9) + \lambda\,(0, 1, -1)$ e

$$s: \begin{cases} x - 1 = y \\ z = 4 \end{cases}$$

Resolução

Temos $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, logo

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{|(0, 1, -1) \cdot (1, 1, 0)|}{\|(0, 1, -1)\| \; \|(1, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$ (em radianos).

2. Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC, sendo $A = (1, 1, 0)$ e sabendo que o lado BC está contido na reta r de equação vetorial $X = (0, 0, 0) + \lambda\,(0, 1, -1)$.

Resolução

Seja P um dos vértices (B ou C). Então, como $P \in r$, temos

$$P = (0, \lambda, -\lambda) \qquad (\alpha)$$

Mas o ângulo entre r e a reta que passa por A e P mede 60°. Assim, como $\vec{u} = (0, 1, -1)$ é um vetor diretor de r e $\overrightarrow{AP} = (-1, \lambda - 1, -\lambda)$, devemos ter:

$$\cos 60° = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP}|}{\|\vec{u}\| \; \|\overrightarrow{AP}\|}$$

ou

$$\frac{1}{2} = \frac{|\lambda - 1 + \lambda|}{\sqrt{2}\sqrt{1 + (\lambda - 1)^2 + \lambda^2}}$$

Simplificando, após elevar ambos os membros ao quadrado, chega-se a $\lambda^2 - \lambda = 0$, e portanto $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Portanto, segue de (α) que $P = (0, 0, 0)$ ou $P = (0, 1, -1)$. Conclusão: os dois vértices B e C são $(0, 0, 0)$ e $(0, 1, -1)$.

3. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos $X \in E^3$ tais que a medida em radianos do ângulo entre o eixo dos z e a reta que passa por X e $P = (0, 0, 2)$ seja $\frac{\pi}{4}$.

Resolução

Pondo $X = (x, y, z)$, temos $\overrightarrow{PX} = (x, y, z - 2)$. Assim, chamando Ω o lugar geométrico,

$$X \in \Omega \iff \frac{|\overrightarrow{PX} \cdot \vec{k}|}{\|\overrightarrow{PX}\| \; \|\vec{k}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

logo,

$$X \in \Omega \iff \frac{(z - 2)^2}{x^2 + y^2 + (z - 2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \begin{cases} (z - 2)^2 = x^2 + y^2 \\ z \neq 2 \end{cases}$$

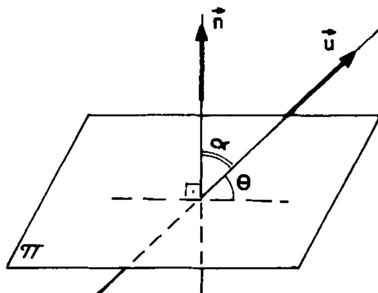
Segue-se que

$$(z - 2)^2 = x^2 + y^2 \qquad (z \neq 2)$$

é uma equação para Ω. Note que, da forma como foi enunciado o problema, o ponto P não pertence a Ω, daí a ressalva $z \neq 2$. Use a sua intuição geométrica para perceber que Ω é uma superfície cônica(*) tendo o eixo dos z como eixo de simetria (veja o Exercício 10, §6 do Capítulo 22).

§2 Ângulo entre Reta e Plano

Para achar a medida θ do ângulo entre a reta r e o plano π, basta achar a medida α do ângulo entre r e uma reta normal a π, uma vez que $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$. Sejam $\vec{u}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π. Então, como



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{u}\|}$$

(veja o §1), temos

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{u}\|} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

(por serem α e θ complementares, sabemos que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\theta$).

Observação

O ângulo entre uma reta r e um plano π é definido como sendo o ângulo entre r e sua projeção ortogonal sobre π, salvo se $r \perp \pi$. Assim, se θ é a medida em radianos desse ângulo, temos necessariamente $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre

$$r:\ X = (0, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 0) \quad \text{e} \quad \pi:\ y + z - 10 = 0$$

(*) Sem o seu vértice.

Resolução

Como $\vec{n} = (0, 1, 1)$ é normal a π, e $\vec{u} = (-1, -1, 0)$ é paralelo a r, temos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{u}\|} = \frac{1}{2}$$

donde $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Obtenha equações paramétricas da reta r, que passa pelo ponto P = (1, 1, 1), é paralela ao plano $\pi_1 : x + 2y - z = 0$, e forma com o plano $\pi_2 : x - y + 2z = 1$ um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rd.

Resolução

Tudo que precisamos é obter um vetor diretor $\vec{u}$ da reta r. Como há uma infinidade de vetores paralelos a r, esse problema é obviamente indeterminado(*). Seja $\vec{u} = (a, b, c)$. Como $\vec{n}_1 = (1, 2, -1)$ é normal a π_1, temos:

$$r \,//\, \pi_1 \iff \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \iff a + 2b - c = 0 \qquad (\alpha)$$

Por outro lado, sendo $\vec{n}_2 = (1, -1, 2)$ normal a π_2, vem

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{n}_2\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|a - b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{6}} \qquad (\beta)$$

De (α), obtemos $c = a + 2b$. Substituindo em (β), elevando membro a membro ao quadrado e simplificando (faça!), obtemos $b = 0$ e portanto (por (α) novamente) $a = c$. Isso quer dizer que o conjunto solução do sistema das equações (α) e (β) é constituído de todos os vetores da forma (a, 0, a). Observe que todos eles são paralelos e portanto qualquer um deles (não nulo) é um diretor de r. Escolhendo, por exemplo, a = 1, teremos $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e então

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

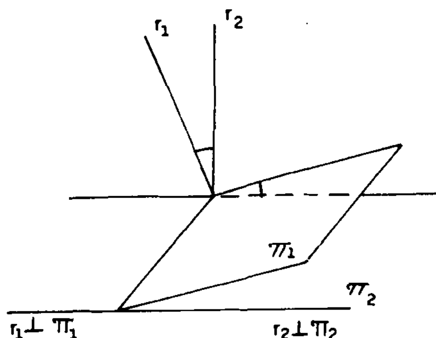
(*) Com um grau de liberdade.

Observação

Uma outra maneira de resolver é determinando o ponto $Q = (x, y, z)$ interseção de r com π_2. Tente fazer assim. Vale a pena observar, que nesse caso, havendo um único ponto Q para cada reta r, somos obrigados a procurar três equações independentes nas incógnitas x, y, z e obter assim um sistema determinado.

§3 Ângulo entre planos

A medida θ do ângulo entre os planos π_1 e π_2 é a medida do ângulo entre duas retas r_1 e r_2, respectivamente perpendiculares a π_1 e π_2.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache a medida θ do ângulo entre os planos

$$\pi_1 : x - y + z = 20 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : x + y + z = 0$$

Resolução

$\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ é normal a π_1; logo paralelo a r_1. $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$ é normal a π_2; logo paralelo a r_2. Então, como vimos no § 1,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|} = \frac{|(1, -1, 1) \cdot (1, 1, 1)|}{\|(1, -1, 1)\| \, \|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

donde $\theta = \text{arc cos}\,\dfrac{1}{3}$.

2. Obtenha uma equação geral do plano π, que contém a reta

$$r: \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

e forma com o plano $\pi_1 : x + z = 0$ um ângulo de 60 graus.

Resolução

Se π contém a reta r, sua equação é a da forma

$$\alpha(x - 2y + 2z) + \beta(3x - 5y + 7z) = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

(veja o Capítulo 15, §4), ou seja,

$$\pi: (\alpha + 3\beta)x - (2\alpha + 5\beta)y + (2\alpha + 7\beta)z = 0 \qquad (\delta)$$

e portanto $\vec{n} = (\alpha + 3\beta, -2\alpha - 5\beta, 2\alpha + 7\beta)$ é um vetor normal a π. Sendo $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$ normal a π_1, devemos ter

$$\cos 60° = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{n}_1\|}$$

o que nos leva a

$$\frac{1}{2} = \frac{|3\alpha + 10\beta|}{\sqrt{2}\sqrt{9\alpha^2 + 54\alpha\beta + 83\beta^2}}$$

Quadrando membro a membro e simplificando, obtemos

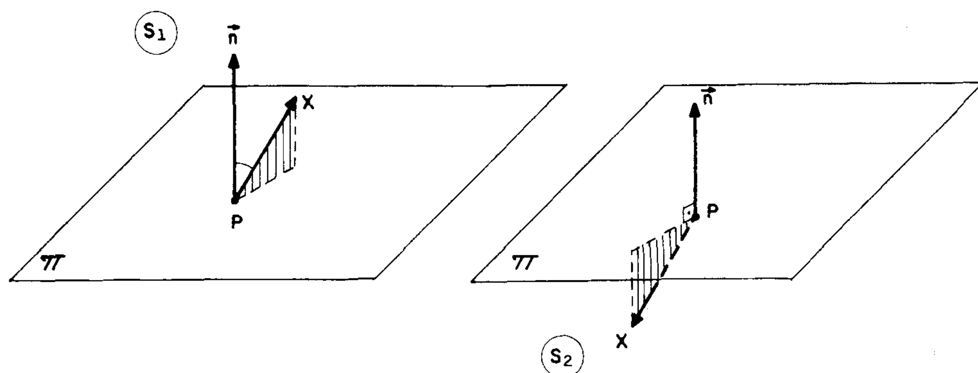
$$3\alpha^2 + 22\alpha\beta + 39\beta^2 = 0$$

Resolvendo esta equação de 2º grau em α, você obterá $\alpha = -3\beta$ e $\alpha = -\frac{13}{3}\beta$.

Substituindo em (δ), obtemos duas soluções para o problema: $\pi: y + z = 0$ e $\pi: 4x - 11y + 5z = 0$.

§ 4 Semi-espaço

Seja $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano. Queremos caracterizar algebricamente os semi-espaços S_1 e S_2 (abertos) determinados por π. Para isso, fixemos um ponto $P \in \pi$ e observemos que (veja a figura)



$$S_1 = \{X \in E^3 \mid \quad \overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} > 0\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{X \in E^3 \mid \quad \overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} < 0\}$$

onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π. Isso se deve ao fato de que para os pontos de um semi-espaço, o ângulo entre $\overrightarrow{PX}$ e $\vec{n}$ é agudo, e para os do outro, obtuso (é claro que para $X \in \pi$, tem-se $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$).

Sejam agora $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $X = (x, y, z)$. De $P \in \pi$, sabemos que

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \qquad (1)$$

Assim,

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c$$

$$= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$$

$$\overset{(1)}{=} ax + by + cz + d \qquad (1)$$

Concluímos que os semi-espaços abertos S_1 e S_2 se caracterizam pelas inequações

$$S_1 : ax + by + cz + d > 0$$

$$S_2 : ax + by + cz + d < 0$$

e os semi-espaços fechados(*) $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$ se caracterizam pelas inequações

$$\overline{S}_1 : ax + by + cz + d \geqslant 0$$

$$\overline{S}_2 : ax + by + cz + d \leqslant 0$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique se os pontos $A = (1, 2, 4)$ e $B = (2, -1, -3)$ pertencem ao mesmo semi-espaço ou a semi-espaços opostos relativamente ao plano $\pi: 2x - 3y - z = 0$.

Resolução

Basta substituir as coordenadas de A e B no primeiro membro da equação de π:

$$A: \ 2.1 - 3.2 - 4 = -8 < 0$$

$$B: \ 2.2 - 3(-1) - (-3) = 10 > 0$$

Logo, A e B pertencem a semi-espaços opostos.

2. Os planos $\pi_1 : 2x - 3y + z = 0$ e $\pi_2 : x - 3y - z - 2 = 0$ determinam quatro diedros. Chamemos I o diedro que contém $P = (1, 0, 0)$ e II o diedro que contém $Q = (3, 2, -1)$. Quais pontos de $r: X = (1, 2, -2) + \lambda(-1, 1, 1)$ pertencem a I e quais pertencem a II?

Resolução

Seja X um ponto genérico de r. Então, $X = (1 - \lambda, 2 + \lambda, -2 + \lambda)$. Substituindo as coordenadas de P no primeiro membro da equação de π_1, obtemos $2.1 - 3.0 + 0 = 2 > 0$. Substituindo no primeiro membro da equação π_2, obtemos $1 - 3.0 - 0 - 2 = -1 < 0$.

Então, $X \in I$ se e somente se

$$2(1 - \lambda) - 3(2 + \lambda) + (-2 + \lambda) > 0 \quad \text{e} \quad 1 - \lambda - 3(2 + \lambda) - (-2 + \lambda) - 2 < 0$$

(*) Isto é, incluindo o plano π.

isto é,

$$X \in I \iff \lambda < -\frac{3}{2} \text{ e } \lambda > -1$$

Como não existe λ nas condições acima, nenhum ponto de r pertence a I.

Quanto a II: substituindo as coordenadas de Q nos primeiros membros das equações de π_1 e π_2, obtemos, respectivamente, $2.3 - 3.2 - 1 = -1 < 0$ e $3 - 3.2 - (-1) - 2 = -4 < 0$

Então $X \in II$ se e somente se

$$2(1 - \lambda) - 3(2 + \lambda) + (-2 + \lambda) < 0 \text{ e } 1 - \lambda - 3(2 + \lambda) - (-2 + \lambda) - 2 < 0$$

isto é,

$$X \in II \iff \lambda > -\frac{3}{2} \text{ e } \lambda > -1 \iff \lambda > -1$$

ou

$$r \cap II = \{X = (1 - \lambda, 2 + \lambda, -2 + \lambda) \mid \lambda > -1\}$$

que é uma semi-reta.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache o co-seno do ângulo entre as retas:

a) $X = (-\frac{5}{2}, 2, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, 1, 1)$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\,\lambda \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5 + \sqrt{2}\,\lambda \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases}$

d) $x = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 8z = 1 \end{cases}$

2. Ache a medida em radianos do ângulo entre a reta e o plano dados:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ $\qquad$ $z = 0$

b) $x = y = z$ $\qquad$ $z = 0$

c) $X = (0, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0)$ $\qquad$ $3x + 4y = 0$

d) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ $\qquad$ $x + y - z - 1 = 0$

e) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases}$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0$

3. Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos:

a) $2x + y - z - 1 = 0$ $\qquad$ $x - y + 3z - 10 = 0$

b) $X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0)$ $\qquad$ $x + y + z = 0$

c) $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$ $\qquad$ $X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, 0) + \mu(0, 1, 0)$

4. Ache a reta que intercepta as retas

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados.

5. Ache a reta que passa pelo ponto $P = (0, 2, 1)$ e que forma ângulos congruentes com as retas

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

6. Ache a reta que passa pelo ponto $(1, -2, 3)$ e que forma ângulos de 45° e 60° respectivamente com o eixo dos x e dos y.

7. Ache uma reta que passa por $P = (1, 1, 1)$, intercepta a reta $r: \frac{x}{2} = y = z$ e forma com ela um ângulo θ com $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano $\pi: x + y + z = 0$ e que forma 45 graus com o plano $\pi_1: x - y = 0$.

9. Calcule a medida dos ângulos entre a diagonal de um cubo e suas faces.

10. Ache uma equação geral de um plano que contém a reta $r: \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e que forma ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rd com o plano $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

11. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r: \begin{cases} 3z - x = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ e forma com $s: X = (1, 1, 0) + \lambda(3, 1, 1)$ um ângulo cuja medida em radianos é $\theta = \text{arc cos}\frac{2\sqrt{30}}{11}$.

12. Resolva novamente (usando ângulos agora) os exercícios:

    a) nº 11 do §2 do Capítulo 17 b) nº 5 do §3 do Capítulo 17.

13. Releia o Exercício 28, Capítulo 16 §4. Qual dos dois planos encontrados intercepta o tetraedro OABC?

14. A diagonal BC de um quadrado ABCD está contida na reta $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$. Conhecendo $A = (1, 1, 0)$, determine os outros três vértices.

CAPÍTULO 19

DISTÂNCIAS

Neste capítulo está fixado um sistema ortogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de coordenadas.

§1 Distância de ponto a ponto

Fixado um sistema ortogonal de coordenadas, sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. Então como já vimos no Capítulo 13, a distância entre A e B é

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{BA}\| = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|$$

donde

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \qquad (0)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Prove (analiticamente) que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de dois pontos A e B é um plano perpendicular ao segmento AB que passa pelo seu ponto médio (esse plano é chamado *plano mediador* do segmento AB).

Resolução

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ e chamemos Ω o lugar geométrico. Então

$$X = (x, y, z) \in \Omega \iff d(X,A) = d(X,B)$$

$$\therefore \quad X \in \Omega \iff (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

$$\therefore \quad X \in \Omega \iff x^2 - 2x_1 x + x_1^2 + y^2 - 2y_1 y + y_1^2 + z^2 - 2z_1 z + z_1^2$$

$$= x^2 - 2x_2 x + x_2^2 + y^2 - 2y_2 y + y_2^2 + z^2 - 2z_2 z + z_2^2$$

$$\therefore \ X \in \Omega \iff 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0$$

Logo, uma equação de Ω é

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0$$

Ora, sendo A e B distintos, pelo menos uma das três diferenças $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ e $z_2 - z_1$ é não nula, e portanto trata-se da equação geral de um plano. Além disso, vemos também que o vetor $\vec{n} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ é normal a esse plano. Como $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$, concluímos que o plano é perpendicular ao segmento AB. Resta ainda provar que Ω passa pelo ponto médio de AB. Seja então

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

o ponto médio. Substituindo suas coordenadas no primeiro membro da equação de Ω, obtemos

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(y_1 + y_2)$$

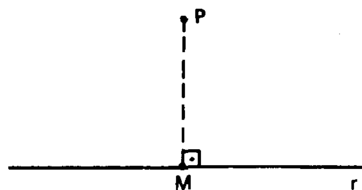
$$+ \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(z_1 + z_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2] = 0$$

o que prova que $M \in \Omega$.

§2 Distância de ponto a reta

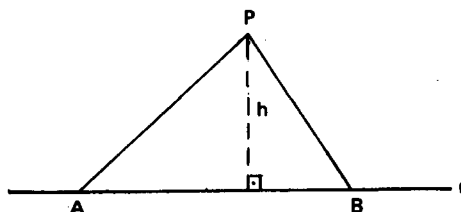
Dados o ponto P e a reta r, para calcular a distância d(P,r) de P a r podemos achar M, projeção ortogonal de P sobre r, e calcular $\|\overrightarrow{PM}\|$, que é a distância procurada. No entanto, o processo seguinte prescinde do conhecimento de M. Sejam A e B dois pontos *quaisquer* de r, $A \neq B$. A área do triângulo ABP, como sabemos, é



$$S = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|$$

Por outro lado (veja a figura)

$$S = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|\ h}{2}$$



Comparando, obtemos $\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\ h$, donde

$$d(P,r) = h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Como A e B são pontos arbitrários de r, podemos ver $\overrightarrow{AB}$ como um vetor diretor arbitrário de r. Então

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}} \qquad (1)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule a distância do ponto $P = (1, 1, -1)$ à reta

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Resolução

Como $A = (-1, -2, -3) \in r$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ é paralelo a r, e $\overrightarrow{AP} = (2, 3, 2)$, resulta imediatamente que

$$d(P,r) = \frac{\|(2, 3, 2) \wedge (1, 1, 2)\|}{\|(1, 1, 2)\|} = \frac{\|(4, -2, -1)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

2. Obtenha uma equação vetorial da reta r, paralela à reta $s: X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 1, 2)$, contida no plano $\pi: x - 4y + z = 0$ e que dista $\frac{\sqrt{20}}{3}$ do ponto $P = (1, 0, 1)$.

Resolução

Seja $X = (x, y, z)$ um ponto genérico de r. Como $r \subset \pi$, temos $X \in \pi$ e portanto X satisfaz a equação de π:

$$x - 4y + z = 0 \qquad (\alpha)$$

O vetor $\vec{v} = (2, 1, 2)$, que é paralelo a s, é um diretor de r. Então, sendo $d(P,r) = \frac{\sqrt{20}}{3}$, temos, por (1), que

$$\frac{\|\overrightarrow{XP} \wedge (2, 1, 2)\|}{\|(2, 1, 2)\|} = \frac{\sqrt{20}}{3}$$

Se você efetuar os cálculos, obterá

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy - 8xz - 4yz - 2x + 8y - 2z - 18 = 0 \qquad (\beta)$$

Assim, $X \in r$ se e somente se X é solução do sistema das equações (α) e (β). Mas, de (α), segue que $x = 4y - z$. Substituindo em (β) e simplificando, vem que $4y^2 - 4yz + z^2 = 1$, isto é, $(2y - z)^2 = 1$, donde

$$2y - z = 1 \qquad \text{ou} \qquad 2y - z = -1$$

Obtivemos assim duas soluções:

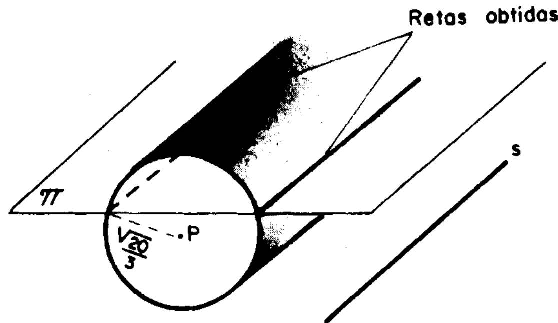
$$r: \begin{cases} x = 4y - z \\ 2y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r: \begin{cases} x = 4y - z \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

Passando para a forma vetorial, obtemos finalmente

$$r: X = (1, 0, -1) + \lambda\,(2, 1, 2) \qquad e \qquad r: X = (-1, 0, 1) + \lambda\,(2, 1, 2)$$

Observação

As retas obtidas são as interseções do plano π com uma superfície cilíndrica, cuja equação é (β).

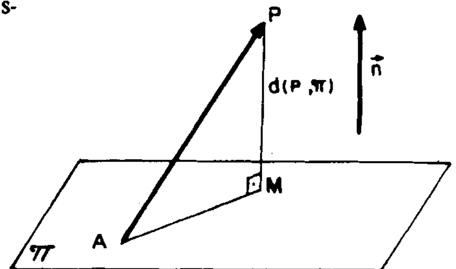


§3 Distância de ponto a plano

Dados um ponto P e um plano π, para achar a distância $d(P,\pi)$ de P a π, podemos achar a projeção ortogonal M de P em π, e daí $d(P, \pi) = \|\overrightarrow{PM}\|$.

Eis um processo que evita achar M. Escolha um ponto A de π e projete ortogonalmente $\overrightarrow{AP}$ sobre um vetor $\vec{n}$ normal a π. A norma dessa projeção é a distância $d(P, \pi)$. Como

$$\|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\| = \left\|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\right\| = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|\ \|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|^2},$$



resulta que

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}} \qquad (2)$$

Vejamos agora esta fórmula em coordenadas. Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$. Então, $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π. Seja ainda $A = (x_1, y_1, z_1)$ o ponto escolhido em π. Então $\overrightarrow{AP} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$, donde

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$= ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

onde a última igualdade se deve a que $A \in \pi$, e portanto $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Substituindo em (2) (e lembrando que $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$), obtemos

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} \qquad (3)$$

Note que o numerador se obtém substituindo, no primeiro membro da equação geral de π, x, y e z por x_0, y_0, z_0 (coordenadas de P), respectivamente.

Observação

Outro procedimento simples para calcular $d(P,\pi)$, independente de memorização de fórmulas: escolha três pontos não colineares A, B e C de π, calcule o volume do tetraedro ABCP, e a área de sua base ABC. A partir daí, calcule a altura, que é a distância procurada.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule a distância do ponto $P = (1, 2, -1)$ ao plano $\pi: 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

Resolução

Temos imediatamente

$$d(P, \pi) = \frac{|3.1 - 4.2 - 5(-1) + 1|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

2. Calcule a distância de $P = (1, 3, 4)$ ao plano

$$\pi: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(-1, 0, 3)$$

Resolução

- Um vetor normal a π é

$$\vec{n} = (1, 0, 0) \wedge (-1, 0, 3) = (0, -3, 0)$$

- Um ponto $A \in \pi$ é $(1, 0, 0)$

- Assim, $\overrightarrow{AP} = (0, 3, 4)$ e por (2)

$$d(P, \pi) = \frac{|(0, 3, 4) \cdot (0, -3, 0)|}{\|(0, -3, 0)\|} = \frac{|-9|}{3} = 3$$

3. Sejam $P = (1, 0, 2)$ e r: $x - y = x + 2z = x + z$. Obtenha uma equação geral do plano π que contém r e dista 2 do ponto P.

Resolução

Se $r \subset \pi$, então π pertence ao feixe de planos por r. Como

$$r: \begin{cases} x - y = x + 2z \\ x + 2z = x + z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

temos que uma equação geral de π será da forma $\alpha(y + 2z) + \beta z = 0$, ou

$$\alpha y + (2\alpha + \beta)z = 0 \qquad (\gamma)$$

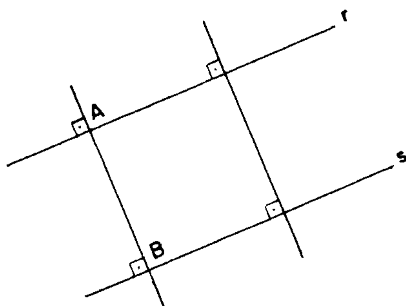
Mas $d(P, \pi) = 2$; logo, por (3),

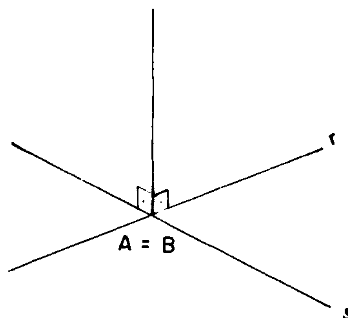
$$\frac{|\alpha \, . \, 0 + (2\alpha + \beta) \, . \, 2|}{\sqrt{\alpha^2 + (2\alpha + \beta)^2}} = 2$$

donde $|2\alpha + \beta| = \sqrt{\alpha^2 + (2\alpha + \beta)^2}$. Quadrando membro a membro e simplificando, obtemos $\alpha = 0$ ($\therefore \beta \neq 0$), que em (γ) fornece $\pi: \beta z = 0$, ou seja, $\pi: z = 0$

§4 Distância entre duas retas

Dadas as retas r e s, sua distância d(r, s) é igual à distância entre os pontos A e B em que uma reta perpendicular comum a r e s as intercepta.

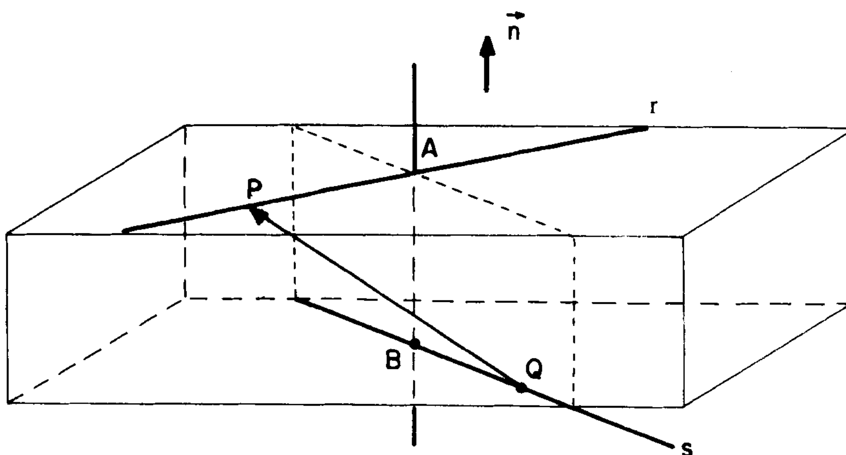




Ocorre que se r e s são concorrentes, os pontos A e B coincidem; logo, d(r, s) = 0 nesse caso. Por outro lado, se r e s são paralelas, existem infinitas perpendiculares comuns e d(r, s) é igual à distância de qualquer ponto de uma das retas à outra. Vamos dedicar agora atenção especial ao caso em que r e s são reversas.

Distância entre duas retas reversas

Sejam r e s duas retas reversas, paralelas respectivamente a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ (logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI).



Escolha um ponto P qualquer em r e um ponto Q qualquer em s. Projete o vetor $\overrightarrow{QP}$ sobre vetor $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, que é ortogonal a r e a s. A norma dessa projeção é a distância entre r e s.

Assim, como

$$\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\ \vec{n}$$

temos

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\|} \qquad (4)$$

ou

$$\boxed{d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}\,|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}} \qquad (5)$$

Note que o segundo membro de (5) é o quociente entre o volume de um paralelepípedo e a área de sua base. Faça uma figura!

Observações

1. O processo acima aplica-se também quando r e s são concorrentes (pense a respeito disso), mas não quando r e s são paralelas, pois neste caso $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Dadas então duas retas quaisquer, o modo mais prático de proceder é o seguinte.

   - Verificar se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD, calculando $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
   - Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD (r // s), tomar um ponto P qualquer de r e calcular d(P, s).
   - Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, utilizar o processo acima.

2. Outro procedimento bastante simples para se calcular d(r, s) que não exige memorização das fórmulas (4) e (5): determine o plano π que contém r e é paralelo a s. Escolha um ponto Q qualquer de s e calcule d(Q, π). Novamente, falha se r // s (por quê?).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule a distância entre as retas

$$r: X = (-1, 2, 0) + \lambda(1, 3, 1) \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} 3x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolução

a) vetor diretor de r: $\vec{u} = (1, 3, 1)$

$$\text{vetor diretor de s: } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 3, 3)$$

Como

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (6, -1, -3) \neq \vec{0}$$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI.

b) Tomamos $P = (-1, 2, 0) \in r$ e $Q = (1, 2, 0) \in s$.

Então $\overrightarrow{QP} = (-2, 0, 0)$ e

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|(-2, 0, 0) \cdot (6, -1, -3)|}{\|(6, -1, -3)\|}$$

Logo,

$$d(r, s) = \frac{|-12|}{\sqrt{46}} = \frac{12}{\sqrt{46}}$$

2. Dados o ponto $P = (1, 3, -1)$, o plano $\pi: x + z = 2$ e a reta $s: x - z = y + 2 = z - x + 4$, obtenha equações paramétricas da reta r que passa por P, é paralela a π e dista 3 da reta s.

Resolução

Devemos achar um vetor $\vec{u} = (a, b, c)$ paralelo a r(*). Sendo $\vec{n} = (1, 0, 1)$ normal a π e $r \,//\, \pi$, temos $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, isto é,

$$a + c = 0 \qquad (\alpha)$$

(*) Existe uma infinidade; obteremos um sistema indeterminado nas incógnitas a, b e c, com um grau de liberdade.

Vamos agora calcular $d(r, s)$ usando (5). Para isso devemos supor que r não é paralela a s (veja observação no final do exercício).

- Fazendo $z = \lambda$ nas equações de s, obtemos $x = 2 + \lambda$ e $y = 0$. Logo,

$$s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

donde $Q = (2, 0, 0) \in s$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ é paralelo a s.

- $P = (1, 3, -1) \in r$. Como $\overrightarrow{QP} = (-1, 3, -1)$, temos:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3c - 3a$$

- $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b, c - a, -b)$$

Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{2b^2 + (c - a)^2}$.

- Como $d(r, s) = 3$, aplicando (5) obtemos

$$\frac{|3c - 3a|}{\sqrt{2b^2 + (c - a)^2}} = 3 \qquad (\beta)$$

- De (α), temos $a = -c$. Substituindo em (β) vem que

$$\frac{|6c|}{\sqrt{2b^2 + 4c^2}} = 3$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos $2c^2 = b^2 + 2c^2$ donde $b = 0$. Logo, todo vetor não nulo da forma $\vec{u} = (-c, 0, c)$ é paralelo a r. Por exemplo $\vec{u} = (-1, 0, 1)$. Assim, a reta r tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

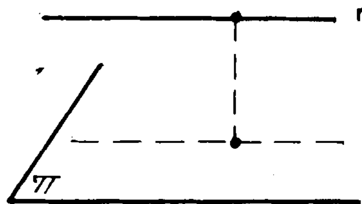
Observação

Resta saber se existe uma solução r paralela a s. Tal reta teria equação vetorial $X = (1, 3, -1) + \lambda(1, 0, 1)$. Verifique que esta reta não satisfaz às condições do problema.

§5 Distância entre reta e plano

Consideremos uma reta r e um plano π. Sendo $\vec{v}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π, sua distância $d(r, \pi)$ é calculada da seguinte forma:

- se r $\pitchfork$ π, ou seja, se $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$, então $d(r, \pi) = 0$;
- se $r \parallel \pi$ ou $r \subset \pi$, ou seja, se $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, então $d(r, \pi)$ é a distância de um ponto qualquer de r a π. (Cuidado! Não vá calcular a distância de um ponto qualquer de π a r! Todos os pontos de r estão a igual distância de π, mas os pontos de π não estão todos à mesma distância de r).



§6 Distância entre dois planos

Dados dois planos, π_1 e π_2, com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, sua distância $d(\pi_1, \pi_2)$ pode ser calculada da seguinte maneira:

- se $\pi_1 \pitchfork \pi_2$, ou seja, se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são LI, então $d(\pi_1, \pi_2)$ é igual a 0.
- se $\pi_1 \parallel \pi_2$, ou seja, se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são LD, então $d(\pi_1, \pi_2)$ é a distância entre π_2 e um ponto qualquer de π_1 (ou a distância entre π_1 e um ponto qualquer de π_2).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule a distância entre os pontos P e Q nos casos

a) $P = (0, -1, 0)$ $\qquad Q = (-1, 1, 0)$

b) $P = (-1, -3, 4)$ $\qquad Q = (1, 2, -8)$

2. Calcule a distância do ponto P à reta r nos casos

a) $P = (0, -1, 0)$ $\qquad r: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$

b) $P = (1, 0, 1)$ $\qquad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \dfrac{\lambda}{3} \end{cases}$

c) $P = (1, -1, 4)$ $\qquad r: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$

d) $P = (-2, 0, 1)$ $\qquad r: \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

3. Calcule a distância entre as retas paralelas dadas.

a) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = z$ $\qquad X = (0, 0, 2) + \lambda\left(-2, \dfrac{1}{2}, 1\right)$

b) $x = \dfrac{y-3}{2} = z - 2$ $\qquad x - 3 = \dfrac{y+1}{2} = z - 2$

4. Calcule a distância do ponto P ao plano π nos casos

a) $P = (0, 0, -6)$ $\qquad \pi: x - 2y - 2z - 6 = 0$

b) $P = (1, 1, \frac{15}{6})$ $\quad\pi : 4x - 6y + 12z + 21 = 0$

c) $P = (9, 2, -2)$ $\quad\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda(0, -\frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0)$

d) $P = (0, 0, 0)$ $\quad\pi : 2x - y + 2z - 3 = 0$

5. Calcule a distância entre os planos paralelos:

a) $2x - y + 2z + 9 = 0$ $\quad 4x - 2y + 4z - 21 = 0$

b) $\begin{cases} x = 2 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad x + y + z = \frac{5}{2}$

c) $x + y + z = 0$ $\quad x + y + z + 2 = 0$

6. Calcule a distância entre as retas

a) $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

b) $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-2}$ $\quad \begin{cases} x = 21 + 6\lambda \\ y = -5 - 4\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

7. Ache os pontos de $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam 3 do ponto $A = (0, 2, 1)$.

8. Ache os pontos de $r: x - 1 = 2y = z$ que equidistam dos pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$. Interprete geometricamente o resultado.

9. Determine o ponto de π: $2x - y + z - 2 = 0$ tal que a soma de suas distâncias a P e Q seja mínima nos seguintes casos:

a) $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, -1, -1)$

b) $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, -1, 2)$

c) $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (0, 1, 1)$

10. Ache o ponto de $\pi : x - 3y + 2z = 0$ tal que o módulo da diferença entre suas distâncias a P e Q seja máximo nos seguintes casos:

a) $P = (3, 0, 2)$ e $Q = (1, -1, 3)$

b) $P = (3, 0, 2)$ e $Q = (-1, 0, -1)$

c) $P = (3, 0, 2)$ e $Q = (1, 1, 1)$

11. Ache os pontos de $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam $\sqrt{\dfrac{14}{3}}$ de $s : x = y = z + 1$.

12. Ache os pontos de $r : x - 1 = 2y = z$ que equidistam de

$$s_1 : \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s_2 : \quad x = y = 0$$

13. Obtenha uma equação vetorial da reta r paralela a $s : \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, concorrente com $t : X = (-1, 1, 1) + \lambda (0, -1, 2)$, e que dista 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$.

14. Um quadrado ABCD tem a diagonal BD contida na reta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sabendo que $A = (0, 0, 0)$, determine os vértices B, C e D.

15. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de r, s e A. Interprete geometricamente. Dados:

$$r : x = y = z \qquad s : x - y = z = x + y \qquad A = (1, 0, 1)$$

16. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam das retas

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Descreva o lugar geométrico.

17. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam das três retas

$$r_1: \begin{cases} x = 4 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad r_3: x - y = x + z = 1 + z$$

Descreva o lugar geométrico.

18. Ache os pontos da reta $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam $\sqrt{6}$ de $\pi: x - 2y - z = 1$.

19. Ache os pontos da reta $r: x - 1 = 2y = z$ que equidistam dos planos

$$\pi_1: 2x - 3y - 4z - 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2: 4x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

20. Dê uma equação geral do plano π que contém a reta $r: X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ do ponto $P = (1, 1, -1)$.

21. As retas r, s e t determinam com o plano π um tetraedro. Calcule a altura relativa à face situada no plano π. Dados:

$$\pi: x + y - z + 1 = 0 \qquad r: x = y = z + 1 \qquad s: x - y = z + 1 = 0$$

$$t: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

22. Dê uma equação geral do plano que passa pelos pontos $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, 1, 1)$ e que dista 1 da reta $r: X = (1, 0, 2) + \lambda(1, 0, 2)$.

23. Prove que todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento PQ é equidistante de P e Q. Verifique se vale a recíproca.

24. Dê uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$ e equidista dos pontos $C = (2, 3, 0)$ e $D = (0, 1, 2)$.

25. Obtenha uma equação vetorial da reta t, paralela ao plano $\pi : z = 0$, que dista 3 dele, e é concorrente com as retas

$$r : X = (1, -1, -1) + \lambda(1, 2, 4)$$

$$s : \begin{cases} x - y = 1 \\ 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

26. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam dos planos $\pi_1 : x + y - z = 0$, $\pi_2 : x - y - z - 2 = 0$ e $\pi_3 : x + y + z = 1$. Descreva-o geometricamente.

27. Dados os pontos: $A = (-2, 0, 1)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (-2, -1, -2)$ e $E = (1, 2, 2)$, mostre que eles são vértices de uma pirâmide de base quadrangular, convexa (veja o Exercício 1c do Capítulo 13), e calcule o volume dessa pirâmide.

28. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de E^3 cujas distâncias ao plano $\pi_1 : 2x - y + 2z - 6 = 0$ são os dobros de suas distâncias ao plano $\pi_2 : x + 2y - 2z + 3 = 0$. Descreva-o geometricamente.

29. Dê equações gerais dos planos paralelos ao plano π determinado pelas retas r e s, e que distam 2 de π. Dados:

$$r : \begin{cases} x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$$

30. Num tetraedro OABC, as arestas OA, OB e OC medem, respectivamente, 2, 3, e 4; e os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$ medem respectivamente 30, 45 e 60 graus. Calcule o volume do tetraedro.

Sugestão Adote um sistema de coordenadas conveniente.

31. Considere os planos $\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x + 3y = 0$.

a) Obtenha equações gerais dos dois bissetores dos diedros determinados por π_1 e π_2 (lembrete: os bissetores constituem o lugar geométrico dos pontos equidistantes de π_1 e π_2).

b) Confira o resultado obtido, mostrando que cada um dos planos encontrados contém a reta $\pi_1 \cap \pi_2$ e forma ângulos congruentes com π_1 e π_2.

c) Verifique que os bissetores são perpendiculares.

32. Um dos ângulos diedros formados pelos planos π_1 e π_2 contém a origem. Dê uma equação geral do seu bissetor, dados $\pi_1 : x + 2y - 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + 2z + 2 = 0$.

Sugestão Localize a origem em relação a π_1 e π_2.

33. Escreva uma equação geral do bissetor do diedro agudo formado pelos planos $\pi_1 : x - 2y + 3z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - 3z = 0$.

34. Dê uma equação vetorial da reta r, contida no plano $\pi : x + y = 0$, que forma um ângulo de 30° com o plano $\alpha : y - z = 1$ e dista 1 do eixo dos x.

35. Calcule a distância entre os planos paralelos

$\pi_1 : \quad ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : \quad ax + by + cz + d_2 = 0$.

36. Considere o tetraedro OABC onde O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0) e C = (0, 0, 3). Ache uma equação geral do plano π paralelo à base ABC, distandô 3/7 dela, e que intercepta o tetraedro.

CAPÍTULO 20

MUDANÇA DE COORDENADAS

Freqüentemente, em problemas de Geometria Analítica, somos levados a passar de um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ adotado inicialmente para outro, $(O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, mais conveniente. Essa maior conveniência pode ser devida a vários fatores; por exemplo, se o primeiro sistema não for ortogonal pode surgir a necessidade de mudar para um sistema ortogonal; outras vezes, o objetivo é simplificar os cálculos algébricos, ou explorar melhor certas simetrias etc. Neste Capítulo, veremos como se alteram coordenadas de pontos e equações de lugares geométricos, com a mudança de um sistema de coordenadas para outro.

O problema central será sempre estabelecer relações entre as "antigas" e as "novas" coordenadas.

§1 Mudança de Coordenadas em E^3

Sejam $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ dois sistemas de coordenadas cartesianas em E^3, o primeiro referido daqui por diante como o "antigo", o segundo como o "novo". Utilizaremos x, y, z para indicar as coordenadas de um ponto X qualquer, relativamente ao sistema "antigo" e chamaremos (h, k, m) a tripla de coordenadas de O' em relação a ele:

$$O' = (h,k,m)_{\Sigma_1}$$

(h, k e m) são as coordenadas da "nova" origem no sistema "antigo").

Sendo $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ base, sabemos que se X é um ponto qualquer de E^3, existem u, v, w reais, determinados univocamente, tais que $\overrightarrow{O'X} = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 + w\vec{f}_3$. Reciprocamente, dados u, v, w reais, a igualdade anterior determina univocamente o ponto X. Se u, v, w variam em $\mathbb{R}$, todo ponto $X \in E^3$ é obtido desse modo. Em outros termos

$$X \in E^3 \iff X = O' + u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 + w\vec{f}_3 \qquad (u, v, w \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

A equação (1), por analogia com os casos da reta e do plano estudados nos Capítulos 14 e 15, pode ser chamada "equação vetorial do espaço E^3". Nesse caso, os vetores $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, fazem o papel de "vetores diretores" de E^3, enquanto que u, v, w atuam como "parâmetros", do mesmo modo que λ, μ etc. nos casos da reta e do plano já citados. Assim, exatamente como foi feito lá, podemos obter de (1), equações de E^3 na "forma paramétrica".

Para isso, vamos supor que

$$\vec{f}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})_E\,, \qquad \vec{f}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})_E\,, \qquad \vec{f}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})_E$$

onde $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Então, de (1) segue que

$$\boxed{\begin{array}{l} x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z = m + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{array}} \tag{2}$$

Agora, observe que u, v, w, dados em (1) são exatamente as coordenadas de X em relação ao sistema $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ (lembre a definição dada no Capítulo 13) e portanto as equações (2) são as relações procuradas entre as "antigas" e as "novas" coordenadas de X. Por essa razão são chamadas *equações de mudança de coordenadas do sistema Σ_1 para o sistema Σ_2.*

Observação Sabemos que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança da base E para a base F (recorde no Capítulo 7). As equações (2) podem ser escritas matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x-h \\ y-k \\ z-m \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{3}$$

donde se obtém

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x-h \\ y-k \\ z-m \end{bmatrix} \tag{4}$$

As fórmulas (3) e (4) são as fórmulas (6) e (7) do Capítulo 7, aplicadas ao vetor $\overrightarrow{O'X}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Escreva as equações da mudança de coordenadas do sistema Σ_1 para o sistema Σ_2, onde, com a notação anterior, $O' = (1, 2, -1)_{\Sigma_1}$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Resolução

Pelos dados, vemos que $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)_E$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1)_E$, $\vec{f}_3 = (1, 2, -1)_E$.

Então, por (2)

$$\begin{cases} x = 1 + u + w \\ y = 2 + 2w \\ z = -1 + v - w \end{cases}$$

2. Tomando Σ_1 e Σ_2 como no exercício anterior, dê as coordenadas do ponto $P = (2, 1, -3)_{\Sigma_1}$ no sistema Σ_2 e as coordenadas do ponto $Q = (0, 1, -1)_{\Sigma_2}$ no sistema Σ_1.

Resolução

Para Q, basta aplicar diretamente as equações de mudança de coordenadas, fazendo aí $u = 0$, $v = 1$ e $w = -1$:

$$x = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$y = 2 - 2 = 0$$

$$z = -1 + 1 - (-1) = 1$$

Logo,

$$Q = (0, 0, 1)_{\Sigma_1}$$

Quanto a P: ou fazemos, nas equações de mudança de coordenadas $x = 2$, $y = 1$ e $z = -3$ e resolvemos o sistema obtido ou usamos (4). Faremos do primeiro modo, esperando que você faça do segundo:

$$\begin{cases} 2 = 1 + u + w \\ 1 = 2 + 2w & \therefore \quad w = -\dfrac{1}{2} \\ -3 = -1 + v - w \end{cases}$$

substituindo na 1ª equação, vem que $2 = 1 + u - 1/2$, donde $u = 3/2$. Substituindo na 3ª equação, resulta que $-3 = -1 + v + 1/2$ donde $v = -5/2$. Logo,

$$P = (3/2,\ -5/2,\ -1/2)_{\Sigma_2}$$

3. Tomando novamente Σ_1 e Σ_2 como no Exercício 1, obtenha equações no sistema Σ_2:

a) do plano $\pi : [\,x - 3y + 2z - 2 = 0]_{\Sigma_1}$

b) da reta $r : [\,X = (1, 1, 2) + \lambda(3, 1, -2)]_{\Sigma_1}$

(o significado da notação é óbvio).

Resolução

Como foi visto no Exercício 1, as equações da mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 são

$$\begin{cases} x = 1 + u + w \\ y = 2 + 2w \\ z = -1 + v - w \end{cases} \qquad (\alpha)$$

a) Substituindo na equação de π, vem:

$$1 + u + w - 3(2 + 2w) + 2(-1 + v - w) - 2 = 0$$

logo,

$$\pi : [\, u + 2v - 7w - 9 = 0]_{\Sigma_2}$$

b) Substituindo nas equações de r:

$$\begin{matrix} x = 1 + 3\lambda & & 1 + u + w = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda & \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} & 2 + 2w = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda & & -1 + v - w = 2 - 2\lambda \end{matrix}$$

destas últimas vem que

$$u = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda \quad , \quad v = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda \quad , \quad w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$$

e portanto

$$r : [\, U = (1/2,\ 5/2,\ -1/2) + \lambda(5,\ -3,\ 1)]_{\Sigma_2}$$

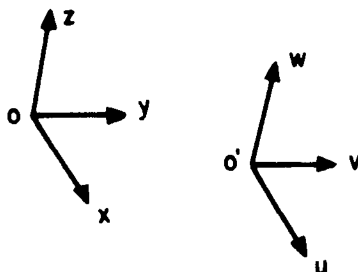
(onde $U = (u, v, w)_{\Sigma_2}$).

4. Escreva as equações da translação do sistema $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ para o ponto $O' = (h, k, m)_{\Sigma_1}$.

Resolução

O termo *translação* é usado quando as bases E e F são iguais ($\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \vec{f}_2 = \vec{e}_2, \vec{f}_3 = \vec{e}_3$), havendo alteração apenas quanto à origem.
Então, M é a matriz identidade, e as equações (3) se reduzem nesse caso a (equações de translação)

$x = h + u$
$y = k + v$
$z = m + w$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ dois sistemas de coordenadas tais que

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \ \vec{f}_2 = -\vec{e}_3, \ \vec{f}_3 = \vec{e}_2 \quad \text{e} \quad O' = (1, 0, 0)_{\Sigma_1} .$$

Obtenha equações paramétricas da reta $r : [X = (0, 0, 0) + \lambda (0, 1, -1)]_{\Sigma_1}$ no sistema Σ_2.

2. Idem, sendo

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{f}_2 = \vec{e}_2, \vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \qquad O' = (1, 1, 1)_{\Sigma_1} \qquad \text{e}$$

$$r : [X = (0,0,0) + \lambda (0, 1, 1)]_{\Sigma_1}.$$

3. Seja $\pi : [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$. Obtenha uma equação geral de π nos sistemas Σ_2 dos dois exercícios anteriores.

§ 2 Mudanças de coordenadas em E^2

Tudo o que foi dito no parágrafo anterior para E^3 (espaço) pode ser adaptado para E^2 (plano). A única diferença é que as bases de V^2 (conjunto dos vetores do plano) têm dois ao invés de três vetores, e portanto para pontos de E^2 temos apenas duas coordenadas. Sendo então $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ dois sistemas de coordenadas em E^2, com $O' = (h, k)_{\Sigma_1}$,

$\vec{f}_1 = (a_{11}, a_{21})_E$ e $\vec{f}_2 = (a_{12}, a_{22})_E$, as equações de mudanças de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 são:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = h + a_{11}u + a_{12}v \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v \end{array}} \qquad (5)$$

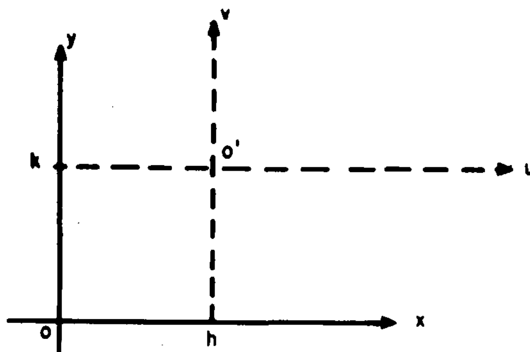
Querêmos neste parágrafo considerar os casos particulares das translações e rotações em E^2, que serão utilizadas com freqüência no próximo capítulo. Suporemos daqui por diante que todos os sistemas são *ortogonais*.

a) *Translação*

Neste caso, temos $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$ e $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$, e portanto M é a matriz identidade. As equações (5) ficam então

$$\boxed{\begin{array}{l} x = h + u \\ y = k + v \end{array}} \qquad (6)$$

que são as equações da translação (compare com o 4º Exercício Resolvido do parágrafo anterior).



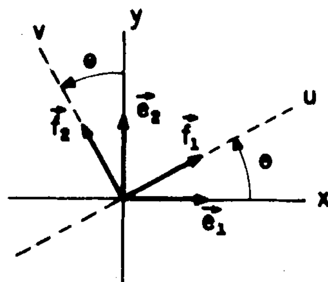
b) *Rotação*

Neste caso, $O' = O$ e portanto $h = k = 0$.

Seja θ a medida do ângulo de rotação (considerado positivo sempre o sentido anti-horário) que transforma o sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ no sistema $(O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Então:

$$\vec{f}_1 = (\cos\theta)\,\vec{e}_1 + (\operatorname{sen}\theta)\,\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = (-\operatorname{sen}\theta)\,\vec{e}_1 + (\cos\theta)\,\vec{e}_2$$



Segue daí e de (5) que as equações da rotação são

$$\boxed{\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y &= u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{aligned}} \qquad (7)$$

Observação

Resolvendo o sistema (7) nas incógnitas u e v, obtém-se

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ v &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}} \qquad (8)$$

Tanto (7) como (8) podem ser obtidas a partir da tabela de dupla entrada

	u	v
x	$\cos\theta$	$-\operatorname{sen}\theta$
y	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$

(Note que a 2ª coluna é a derivada da 1ª).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Escreva as equações da rotação para os seguintes valores de θ:

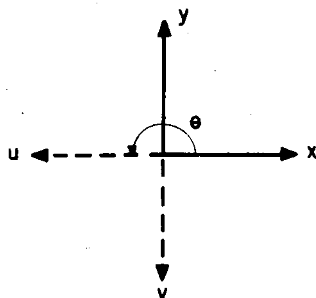
a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{-\pi}{4}$ d) $\frac{2\pi}{3}$

Resolução

Substituindo o valor de θ em (7), temos:

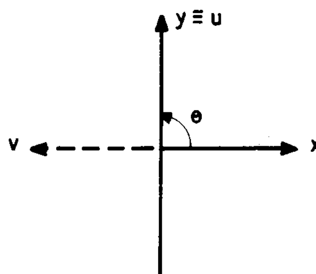
a) $\begin{cases} x = u\cos\pi - v\,\mathrm{sen}\,\pi \\ y = u\,\mathrm{sen}\,\pi + v\cos\pi \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = -u \\ y = -v \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = u\cos\frac{\pi}{2} - v\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} \\ y = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} + v\cos\frac{\pi}{2} \end{cases}$

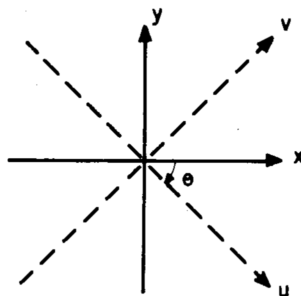
$\therefore \begin{cases} x = -v \\ y = u \end{cases}$



c) $\begin{cases} x = u\cos(\frac{-\pi}{4}) - v\,\mathrm{sen}\,(\frac{-\pi}{4}) \\ y = u\,\mathrm{sen}\,(\frac{-\pi}{4}) + v\cos(\frac{-\pi}{4}) \end{cases}$

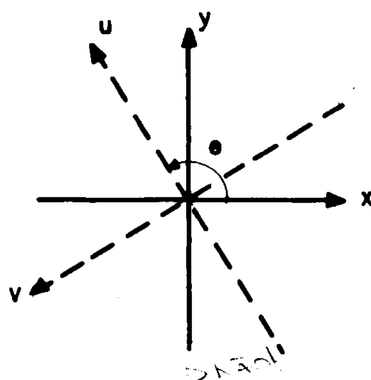
$\therefore \begin{cases} x = u\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -u\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(u + v) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(-u + v) \end{cases}$



d) $\begin{cases} x = u\cos 2\frac{\pi}{3} - v\,\text{sen}\, 2\frac{\pi}{3} \\ y = u\,\text{sen}\, 2\frac{\pi}{3} + v\cos 2\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = -\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases}$



2. Sejam, em relação a um sistema de coordenadas $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ em E^2, $P = (1, 2)$, $r: x - 2y - 1 = 0$ (equação geral de uma reta no plano, lembra-se?). Obtenha as coordenadas de P e uma equação de r no sistema Σ_2, obtido por uma rotação de $\pi/6$ radianos.

Resolução

Por (8) temos:

$$u = x\cos\frac{\pi}{6} + y\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$v = -x\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

Substituindo x e y pelas coordenadas de P obtemos $u = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $v = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$; logo

$$P = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \sqrt{3})_{\Sigma_2}$$

Para obter uma equação de r no sistema Σ_2, usamos (7)

$$x = u\cos\frac{\pi}{6} - v\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v$$

$$y = u\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + v\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

Substituindo na equação dada, vem:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v - 2(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v) - 1 = 0$$

donde

$$r : [(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)\ u - (\frac{1}{2} + \sqrt{3})\ v - 1 = 0]_{\Sigma_2}$$

Observe que o termo independente da equação permanece inalterado.

3. Faça uma rotação em E^2 de modo que a reta r: $[x + y + 3 = 0]_{\Sigma_1}$ fique paralela ao (novo) eixo das ordenadas.

Resolução

Devemos achar o ângulo de rotação. Para que r seja paralela ao eixo dos v, é necessário e suficiente que sua equação seja da forma "u = constante", isto é, que o coeficiente de v seja nulo. Substituindo (7) na equação de r, temos:

$$(u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta) + (u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta) + 3 = 0$$

ou

$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\ u + (\cos\theta - \operatorname{sen}\ \theta)\ v + 3 = 0$$

A condição é, pois,

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \qquad (\alpha)$$

Então, qualquer θ que satisfaça (α) serve aos nossos propósitos: $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$, n inteiro. Escolhamos, por exemplo, $\theta = \frac{\pi}{4}$; a equação de r fica, nesse caso, $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})\ u + 3 = 0$, ou seja,

$$\sqrt{2}\ u + 3 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Faça uma rotação em E^2 de modo que as novas coordenadas do ponto $P = (\sqrt{3},\ 1)$ sejam $(\sqrt{3},\ -1)$.

2. Faça uma translação em E^2 de modo que a reta $r : x + 3y - 2 = 0$ passe pela (nova) origem, sabendo que esta tem abscissa -1.

3. Faça uma rotação em E^2 de modo que a reta r: $x + 2y + 1 = 0$ fique paralela ao (novo) eixo das abscissas e esteja contida no 3º e 4º (novos) quadrantes.

4. Dado o sistema $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, seja C a circunferência de centro O e o raio $r > 0$. Mostre que C, em qualquer sistema obtido por rotação de Σ_1, tem equação $u^2 + v^2 = r^2$.

§3 Aplicação das translações e rotações de E^2 ao estudo da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$ em E^2. Será de grande utilidade no próximo capítulo fazer algumas simplificações na equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (9)$$

Vamos analisar aqui dois problemas:

(I) *Eliminar, por meio de uma translação, os termos de 1º grau.*

Consiste em descobrir o ponto (h, k) para o qual se deve transladar o sistema de modo que a equação (9) se transforme numa equação da forma

$$\overline{A}u^2 + \overline{B}uv + \overline{C}v^2 + \overline{F} = 0 \qquad (10)$$

Substituindo as equações de translação (6) em (9), obtemos:

$$A(u + h)^2 + B(u + h)(v + k) + C(v + k)^2 + D(u + h) + E(v + k) + F = 0$$

donde, efetuando os quadrados e ordenando em relação a u e v, vem:

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + (Bk + 2Ah + D)u + (2Ck + Bh + E)v + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0 \qquad (11)$$

Então, devemos achar h e k de modo que

$$\begin{cases} Bk + 2Ah + D = 0 \\ 2Ck + Bh + E = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Se o sistema (12) tiver solução, teremos resolvido nosso problema. Note que se o determinante

$$\begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC$$

for diferente de zero, o sistema (12) tem certamente solução (única). Se for nulo, podem existir infinitas soluções ou pode não existir nenhuma. Neste caso, é impossível "eliminar os termos de 1º grau por meio de uma translação".

Observe agora a igualdade (11). Os coeficientes dos termos de 2º grau são os mesmos (A, B e C) que na equação (9). *Translações não afetam, pois os termos de 2º grau* (*). Além disso, chamando G (x, y) o 1º membro de (9), vemos que o termo independente de (11) é G (h, k). Essas considerações permitem ganhar tempo na obtenção de (11).

(II) *Eliminar, por meio de uma rotação, o termo misto de 2º grau.*

Consiste em descobrir um ângulo de rotação tal que a equação (9) se transforme, após a rotação, numa equação da forma

$$A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0 \qquad (13)$$

Para levarmos isso a efeito, devemos preliminarmente observar o seguinte: após uma rotação de ângulo θ, a equação (9) se transforma em

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0 \qquad (14)$$

onde:

$$\left.\begin{array}{ll} A' = A\cos^2\theta + \frac{B}{2}\,\text{sen}\,2\theta + C\,\text{sen}^2\theta & (a) \\ B' = (C - A)\,\text{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta & (b) \\ C' = A\,\text{sen}^2\theta - \frac{B}{2}\,\text{sen}\,2\theta + C\cos^2\theta & (c) \\ D' = D\cos\theta + E\,\text{sen}\,\theta & (d) \\ E' = E\cos\theta - D\,\text{sen}\,\theta & (e) \\ F' = F & (f) \end{array}\right. \qquad (15)$$

(*) Dizemos que os coeficientes dos termos de 2º grau são invariantes por translação.

(prove isso). Observe que à semelhança das equações (8) podemos obter (d) e (e) da tabela de dupla entrada ao lado. Observe também que a última igualdade, (f), nos diz que *rotações não afetam o termo independente* (*).

	D′	E′
D	$\cos\theta$	$-\text{sen}\,\theta$
E	$\text{sen}\,\theta$	$\cos\theta$

Mas, voltando ao nosso objetivo: para que (14) seja da forma (13), devemos ter $B' = 0$, ou seja:

$$(C - A)\,\text{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

donde, sendo $B \neq 0$(**), concluímos que:

- se $A = C$, então $\cos 2\theta = 0$ e portanto θ pode ser $\frac{\pi}{4}$, donde por (a) e (c), $A' = \frac{1}{2}(A + B + C)$ e $C' = \frac{1}{2}(A - B + C)$; ou $\frac{3\pi}{4}$, e neste caso $A' = \frac{1}{2}(A - B + C)$ e $C' = \frac{1}{2}(A + B + C)$.

- se $A \neq C$, então

$$\boxed{\text{tg}\,2\theta = \frac{B}{A - C}} \qquad (16)$$

e qualquer θ que satisfaça (16) serve aos nossos propósitos.

Pode-se ainda demonstrar (é um bom exercício de trigonometria!) que, escolhido θ como acima, os coeficientes A' e C' são raízes da equação do 2º grau.

$$\boxed{\begin{vmatrix} A - \lambda & B/2 \\ B/2 & C - \lambda \end{vmatrix} = 0} \qquad (17)$$

o que simplifica bastante a obtenção de (13) (veja o Exercício 4).

(*) O termo independente é invariante por rotações.

(**) Se $B = 0$, o que queríamos já está feito desde o início!

A decisão sobre qual das raízes é A' e qual é C' depende da escolha do valor de θ, entre os muitos possíveis, e está vinculada à relação

$$\boxed{\cos 2\theta = \frac{A - C}{A' - C'}} \qquad (18)$$

que se obtém facilmente de (15).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Está fixado um sistema ortogonal de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Fazendo mudanças de coordenadas convenientes em E^2, transforme a equação

$$G(x, y) = 9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0 \qquad (\alpha)$$

numa equação da forma $A'u^2 + C'v^2 + F' = 0$.

Resolução

Devemos eliminar os termos de 1º grau da equação dada. Para isso, procedemos como vimos em (I). A translação

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

transforma (α) em

$$9u^2 - 4v^2 + (18h - 18)u + (-8k - 16)v + G(h, k) = 0 \qquad (\beta)$$

onde $G(h, k) = 9h^2 - 4k^2 - 18h - 16k - 7$. Impondo que os coeficientes de u e v sejam nulos, temos:

$$\begin{cases} 18h - 18 = 0 \\ -8k - 16 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad h = 1, \quad k = -2$$

Substituindo em (β), obtemos

$$9u^2 - 4v^2 = 0$$

Observação

Quando a equação dada não apresenta o termo xy, pode-se resolver também completando quadrados.

$$9x^2 - 18x = 9(x^2 - 2x) = 9[(x-1)^2 - 1] = 9(x-1)^2 - 9$$

$$-4y^2 - 16y = -4(y^2 + 4y) = -4[(y+2)^2 - 4] = -4(y+2)^2 + 16$$

Substituindo em (α), obtemos

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 0$$

e agora basta fazer $u = x - 1$ e $v = y + 2$.

2. Idem para a equação

$$G(x, y) = 4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0 \qquad (\gamma)$$

Resolução

Aqui vamos inicialmente fazer uma translação para eliminar os termos de 1º grau e após isso fazer uma rotação para eliminar o termo misto do 2º grau.

a) Translação: $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$

Substituindo em (γ), obtemos

$$4u^2 - 24uv + 11v^2 + (-24k + 8h + 56)u + (22k - 24h - 58)v + G(h, k) = 0 \quad (\delta)$$

onde $G(h, k) = 4h^2 - 24hk + 11k^2 + 56h - 58k + 95$. Queremos que

$$\begin{cases} -24k + 8h + 56 = 0 \\ 22k - 24h - 58 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $h = -2/5$, $k = 11/5$ e portanto, de (δ), vem

$$4u^2 - 24uv + 11v^2 + 20 = 0$$

b) Rotação: conforme vimos, A' e C' são raízes da equação (17)

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -12 \\ -12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou seja $\lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0$. Logo, $A' = 20$ e $C' = -5$ ou $A' = -5$ e $C' = 20$.

Como, por (16) e (18),

$$\text{tg}\, 2\theta = \frac{24}{7} \qquad \text{e} \qquad \cos 2\theta = -\frac{7}{A' - C'}$$

o caso $A' = 20$ e $C' = -5$ corresponde à escolha de 2θ no 3º quadrante e o outro corresponde à escolha de 2θ no 1º quadrante. Supondo $0 \leqslant 2\theta \leqslant 2\pi$ e lembrando que $F' = 20$ (rotações não afetam o termo independente), temos duas possíveis soluções:

$$20t^2 - 5w^2 + 20 = 0, \quad \text{para} \quad \pi \leqslant 2\theta \leqslant \frac{3\pi}{2} \ \therefore\ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

e

$$-5t^2 + 20w^2 + 20 = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leqslant 2\theta \leqslant \frac{\pi}{2} \ \therefore\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

onde t indica a abscissa e w a ordenada no novo sistema.

3. Idem para a equação

$$G(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0 \qquad (\alpha)$$

Resolução

Procedemos como no exercício anterior.

a) Translação $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$

Substituindo em (α) e anulando os coeficientes dos termos de 1º grau, obtemos o sistema

$$\begin{cases} -24k + 32h - 85 = 0 \\ 18k - 24h - 30 = 0 \end{cases}$$

que é incompatível. Logo, não existe translação que elimine os termos de 1º grau.

b) Rotação. Sabemos que A' e C' são raízes de

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou seja $\lambda^2 - 25\lambda = 0$. Escolhamos $A' = 0, C' = 25$. Sabemos ainda que $F' = 175$. Então, após a rotação, a equação (α) ficará

$$0u^2 + 25v^2 + D'u + E'v + 175 = 0 \qquad (\beta)$$

Devemos então calcular D' e E'. De (16) e (18), temos

$$\text{tg}\, 2\theta = \frac{-24}{16-9} = \frac{-24}{7}$$

$$\cos 2\theta = \frac{16-9}{0-25} = \frac{7}{-25}$$

Logo, 2θ é do 2º quadrante e podemos escolher θ no 1º quadrante ($\text{sen}\,\theta > 0$, $\cos\theta > 0$). Sendo

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = -7/25^{(*)}$$

(*) Pois $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$.

vem, somando e subtraindo membro a membro, que

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25} \quad , \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{16}{25}$$

donde $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$ e $\cos\theta = \frac{3}{5}$. Agora, de (15), vem:

$$D' = -85.\frac{3}{5} - 30.\frac{4}{5} = -75$$

$$E' = -30.\frac{3}{5} + 85.\frac{4}{5} = 50$$

Substituindo em (β), obtemos $25v^2 - 75u + 50v + 175 = 0$ ou seja $v^2 - 3u + 2v + 7 = 0$. Logo, não foi possível chegar à forma pedida. De qualquer modo, a equação foi simplificada.

Podemos simplificá-la ainda mais, completando quadrados: $v^2 + 2v = (v+1)^2 - 1$ e substituindo na equação obtida. Resulta $(v+1)^2 - 1 - 3u + 7 = 0$, ou seja, $(v+1)^2 - 3(u-2) = 0$. Pondo $t = u - 2$, $w = v + 1$, chegamos a $w^2 - 3t = 0$.

Observe que esta última mudança de variáveis corresponde a uma translação, sendo $h = 2$ e $k = -1$.

Observação

Se tivéssemos escolhido $A' = 25$ e $C' = 0$, teríamos $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ e então 2θ seria do 4º quadrante. Resolva deste modo: supondo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, você vai obter $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ e chegar a $25u^2 + 50u + 75v + 175 = 0$ ou seja $u^2 + 2u + 3v + 7 = 0$. Agora complete quadrados para obter uma equação da forma $t^2 + 3w = 0$.

4. Idem para a equação $G(x, y) = 8x^2 - 2xy + 8y^2 - 46x - 10y + 11 = 0$.

Resolução

a) Translação $(x = u + h,\ y = v + k)$

Obtemos $\begin{cases} 8h - k = 23 \\ -8h + 64k = 40 \end{cases}$

donde $h = 3$ e $k = 1$. Como $G(h, k) = G(3, 1) = -63$, a equação fica

$$8u^2 - 2uv + 8v^2 - 63 = 0$$

b) Rotação. Como $A = C$, tomemos $\theta = \frac{\pi}{4}$. Nesse caso,

$$A' = \frac{1}{2}(A + B + C) = \frac{14}{2} = 7$$

$$C' = \frac{1}{2}(A - B + C) = \frac{18}{2} = 9$$

$$F' = -63$$

A equação obtida é, portanto,

$$7t^2 + 9w^2 - 63 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Está fixado um sistema ortogonal de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Demonstre as relações (15).

2. Demonstre (18).

3. Aplique os métodos deste capítulo às seguintes equações:

a) $4x^2 + y^2 + 8x - 10y + 13 = 0$

b) $4x^2 - 3y^2 + 24x - 12y + 17 = 0$

c) $4x^2 - 5y^2 + 12x + 40y + 29 = 0$

d) $y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

e) $x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$

f) $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$

g) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}\,x - 14\sqrt{13}\,y + 117 = 0$

h) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$

i) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 20x - 10y - 5 = 0$

j) $12x^2 + 8xy - 3y^2 + 64x + 30y = 0$

l) $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$

m) $13x^2 + 6xy + 21y^2 + 34x - 114y + 73 = 0$

n) $2x^2 - 12xy + 7y^2 + 8x + 20y - 14 = 0$

o) $7x^2 + 6xy - y^2 - 2x - 10y - 9 = 0$

p) $25x^2 + 20xy + 4y^2 + 30x + 12y - 20 = 0$

q) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}\,x - 16\sqrt{5}\,y = 0$

4. a) Prove que os números $A + C$ e $B^2 - 4AC$ são invariantes por rotações (isto é, se (9) é transformada em (14) por meio de uma rotação, então $A' + C' = A + C$ e $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$).

b) Mostre que as raízes λ_1 e λ_2 de (17) são reais, quaisquer que sejam A, B e C. Mostre também que elas são iguais somente quando $A = C$ e $B = 0$, caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = A = C$. Conclua que se $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ não pode ser $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

c) Mostre que $A + C$ é a soma das raízes de (17) e $-\dfrac{B^2 - 4AC}{4}$ é o produto delas.

d) Conclua que A' e C' são raízes de (17), escolhido θ de modo a eliminar-se o termo misto.

5. Prove que os números $A + C$ e $B^2 - 4AC$ são invariantes por uma mudança de coordenadas da forma

$$x = h + u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y = k + u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta$$

Sugestão A mudança acima pode ser interpretada como uma translação seguida de uma rotação (roto-translação).

CAPÍTULO 21

CÔNICAS

§1 Elipse, hipérbole, parábola (forma reduzida)

A) Elipse

- **Definição**

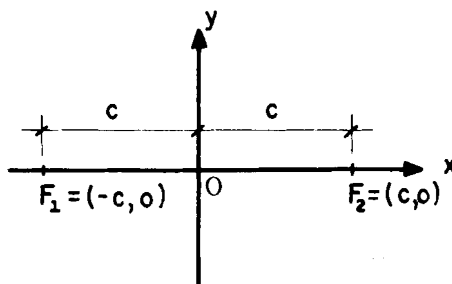
Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c > 0$ entre si. Seja $a > c$. Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \qquad (1)$$

se dá o nome de *elipse*.

- **Equação na forma reduzida**

Tomando um sistema ortogonal como mostra a figura, a igualdade (1) fica, para $P = (x, y)$,



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado e simplificando resulta

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando resulta

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Como $a^2 - c^2 \neq 0$ (na verdade $a^2 - c^2 > 0$ porque $a > c > 0$),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \tag{2}$$

Seja $b = \sqrt{a^2-c^2}$. Então $0 < b < a$ e

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \tag{3}$$

Logo (2) se escreve

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{4}$$

Portanto se $P = (x, y)$ pertence à elipse, x e y satisfazem (4). Reciprocamente, se (x, y) verifica (4) então $P = (x, y)$ é ponto da elipse (experimente provar isto).

- **Esboço**

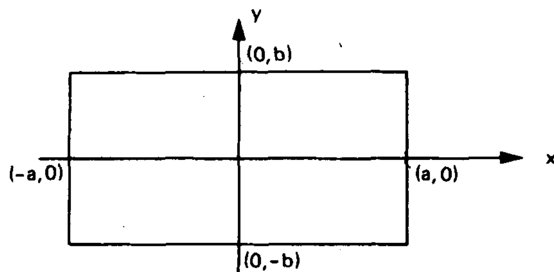
Como (4) só apresenta x e y elevados a expoentes pares, a curva é simétrica em relação aos eixos coordenados, e portanto em relação à origem (se um ponto (p, q) satisfaz (4), os pontos $(-p, q)$, $(p, -q)$ e $(-p, -q)$ também a satisfazem). Além disso, de (4) concluímos facilmente que para todo ponto $P = (x, y)$ da elipse, vale

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \qquad \therefore \qquad -a \leqslant x \leqslant a$$

e

$$\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \qquad \therefore \qquad -b \leqslant y \leqslant b$$

isto é, a elipse está contida no retângulo mostrado na figura.



Achemos as interseções da elipse com os eixos coordenados.

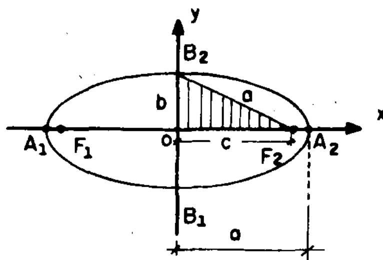
Com Ox: fazendo $y = 0$, vem $x = \pm a$, logo elas são

$$A_1 = (-a, 0), \quad A_2 = (a, 0);$$

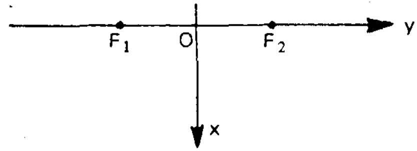
com OY: fazendo $x = 0$, vem $y = \pm b$, logo elas são

$$B_1 = (0, -b), \quad B_2 = (0, b)$$

Graças à simetria, podemos restringir-nos ao 1º quadrante, onde $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Atribuindo valores a x entre 0 e a e calculando y, obtemos o esboço

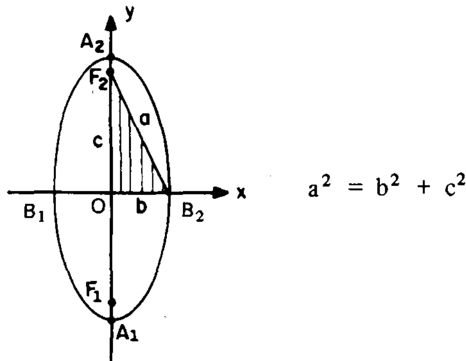


Atenção Se você adotar um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo Oy, como mostra a figura ao lado, então (1) fornecerá, de modo análogo, a seguinte equação



$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad (b = \sqrt{a^2 - c^2})$$

Dispondo os eixos como é tradicional (Ox horizontal, Oy vertical), o esboço da elipse toma o aspecto seguinte



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, a elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ tem focos no eixo Oy, e a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ tem focos no eixo Ox.

- **Nomes**

F_1, F_2	:	focos
2c	:	distância focal
$A_1 A_2$	:	eixo maior
$B_1 B_2$	:	eixo menor
O	:	centro
A_1, A_2, B_1, B_2	:	vértices
$F_1 F_2$	:	segmento focal

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Está fixado um sistema ortogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Escreva a equação e esboce o gráfico da elipse

a) de focos $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$ e eixo maior medindo 12;

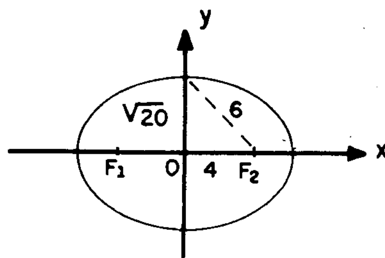
b) de focos $F_1 = (0, -3)$, $F_2 = (0, 3)$ e eixo menor medindo 8.

Resolução

a) Temos $2a = 12$ e $2c = 4 - (-4)$, logo $a = 6$ e $c = 4$. Daí $b^2 = a^2 - c^2 = 20$.

Como os focos estão em Ox, usamos (4):

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$



b) Temos $2b = 8$ e $2c = 3 - (-3) = 6$. Logo $b = 4$ e $c = 3$. De $a^2 = b^2 + c^2$ vem $a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Como os focos estão no eixo Oy, usamos (5):

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

B) Hipérbole

- **Definição**

Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c > 0$ entre si. Seja $0 < a < c$.

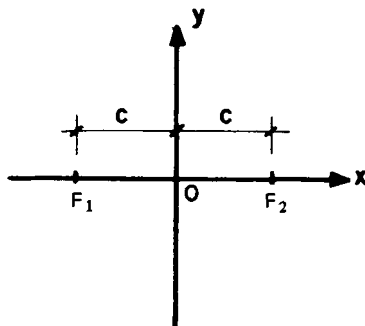
Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \qquad (6)$$

se dá o nome de *hipérbole*.

- **Equação na forma reduzida**

Tomando um sistema ortogonal como mostra a figura, da mesma forma como no caso da elipse, chega-se a que $P = (x, y)$ está na hipérbole se e somente se



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Pondo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ temos $0 < b < c$ e

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \qquad (7)$$

A equação fica

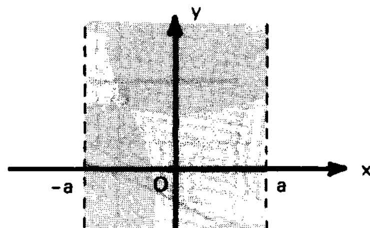
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (8)$$

- **Esboço**

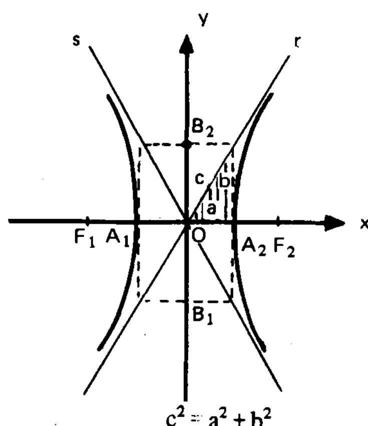
Como (8) só apresenta expoentes pares, concluímos (como no caso da elipse) que a hipérbole é simétrica em relação aos eixos coordenados e portanto em relação à origem. Além disso, de (8) concluímos que se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole, então

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1 \quad \therefore \quad x \geqslant a \quad \text{ou} \quad x \leqslant -a$$

Isso quer dizer que a curva não entra na faixa vertical indicada na figura ao lado. Assim o eixo Oy não a intercepta, enquanto que o eixo Ox a intercepta nos pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ (verifique). Graças à simetria, podemos restingir-nos ao primeiro quadrante, e aí $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geqslant a$.

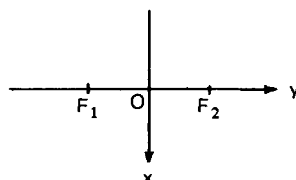


Atribuindo valores a x e calculando y obtemos o esboço seguinte, onde as retas $r: y = \frac{b}{a}x$ e $s: y = -\frac{b}{a}x$ são assíntotas à hipérbole.



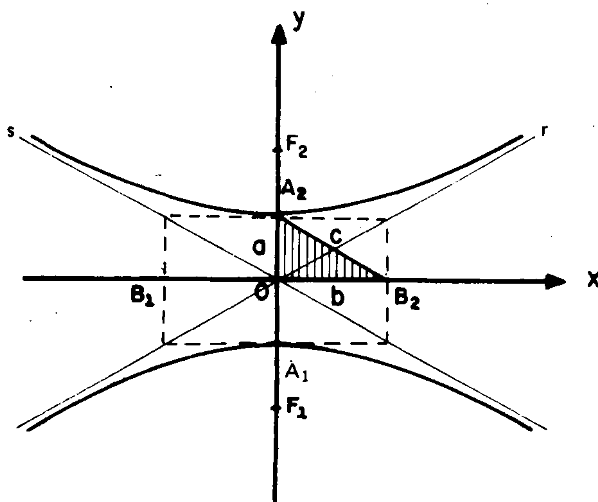
$c^2 = a^2 + b^2$

Atenção Se você adotar um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo Oy como na figura ao lado, então de (6) obterá



$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \qquad (b = \sqrt{c^2 - a^2}) \qquad (9)$$

Dispondo os eixos como é tradicional (Ox horizontal, Oy vertical), o esboço da hipérbole toma o seguinte aspecto:



$c^2 = a^2 + b^2$

Assim, $x^2 - y^2 = 1$ representa uma hipérbole com focos em Ox e $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{100} = 1$ representa uma hipérbole com focos em Oy.

- **Nomes**

F_1, F_2	:	focos
$2c$	:	distância focal
$A_1 A_2$	:	eixo transverso
$B_1 B_2$	:	eixo conjugado
O	:	centro
A_1, A_2	:	vértices
$F_1 F_2$	:	segmento focal
r e s	:	assíntotas

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Está fixado um sistema ortogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Ache as equações da hipérbole e das suas assíntotas, conhecendo

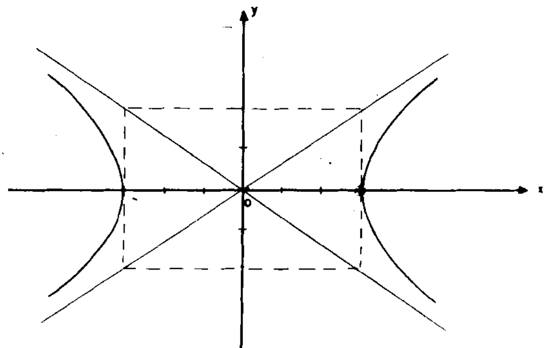
a) os focos $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$ e a medida do eixo transverso, 6;

b) um foco $F_1 = (0, -\sqrt{11})$, a distância focal $2\sqrt{11}$, e a medida do eixo conjugado $2\sqrt{7}$ (F_2 no eixo Oy).

Resolução

a) Temos $2a = 6$ e $2c = 2\sqrt{13}$, logo $a = 3$ e $c = \sqrt{13}$. Daí $b^2 = c^2 - a^2 = 4$. Como os focos estão em Ox, usamos (8):

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$



As assíntotas têm equações

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{2}{3}x$$

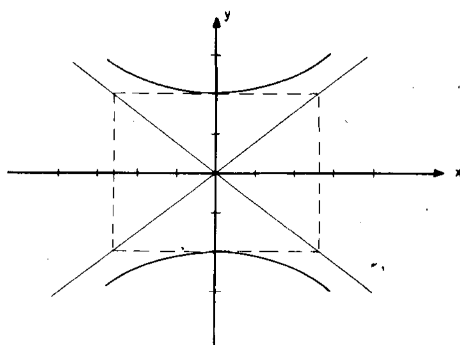
b) Temos $2b = 2\sqrt{7}$, $2c = 2\sqrt{11}$ $\therefore$ $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{11}$.

Daí $a^2 = c^2 - b^2 = 4$. Como os focos estão em Oy, usaremos (9):

$$-\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$$

As assíntotas têm equações

$$y = \frac{2}{\sqrt{7}}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{2}{\sqrt{7}}x$$



C) **Parábola**

- **Definição**

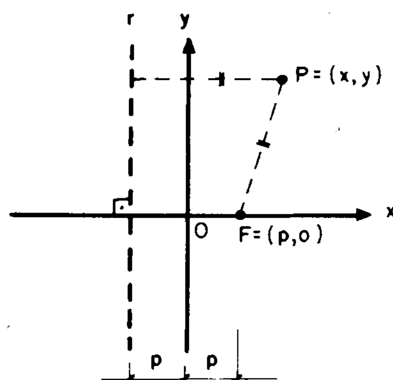
Consideremos num plano π um ponto F e uma reta r, $F \notin r$, fixos. Ao conjunto dos pontos de π equidistantes de F e r se dá o nome de *parábola*.

- **Equação**

Tomemos um sistema ortogonal como se mostra na figura. Seja $2p = d(F, r)$. Nesse caso,

$F = (p, 0)$

$r: \ x = -p \quad \therefore \quad x + p = 0$



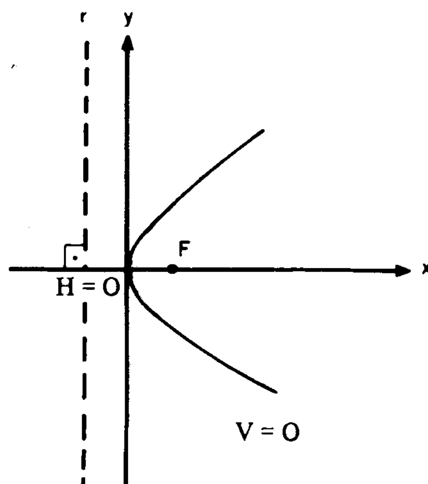
Então $P = (x, y)$ está na parábola se e somente se $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \frac{|x + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

que é equivalente a (elevando ao quadrado e simplificando)

$$\boxed{y^2 = 4px} \qquad (10)$$

- **Esboço**

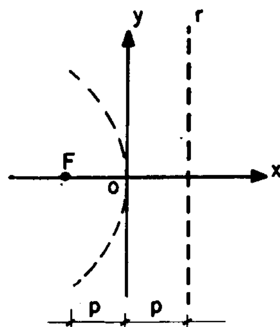


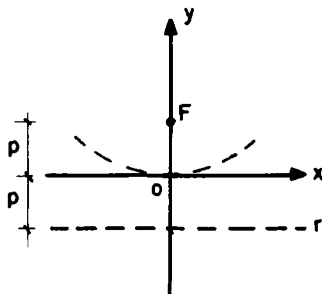
Faça uma análise semelhante à que fizemos nos casos da elipse e da hipérbole para obter o esboço ao lado, onde O é o ponto médio de HF.

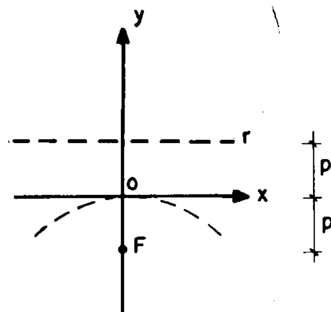
- **Nomes**

F	:	foco
r	:	diretriz
2p	:	parâmetro
reta por F e perpendicular a r	:	eixo (de simetria)
V (ponto médio de HF)	:	vértice

Atenção Escolhendo-se outros sistemas de coordenadas, é claro que a equação da parábola muda. Eis alguns casos.







$F = (-p, 0)$ $F = (0, p)$ $F = (0, -p)$

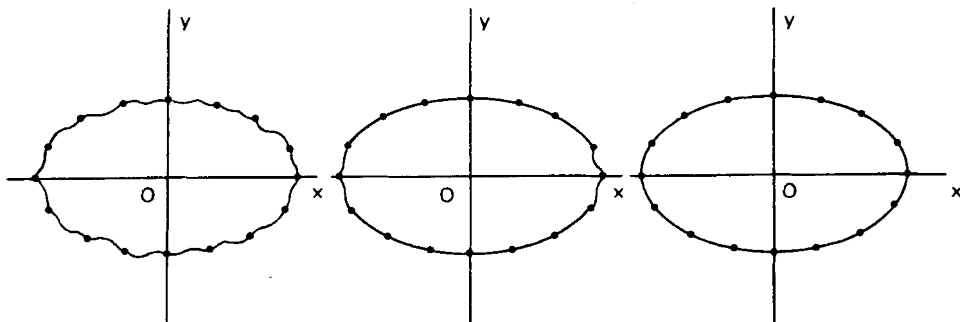
$r : x = p$ $r : y = -p$ $r : y = p$

$$\boxed{y^2 = -4px} \quad (11) \qquad \boxed{y = \frac{1}{4p}x^2} \quad (12) \qquad \boxed{y = -\frac{1}{4p}x^2} \quad (13)$$

Observação

O método utilizado para chegar aos esboços da elipse, da hipérbole e da parábola, é precário e incompleto. Por exemplo, no caso da elipse, mesmo que você atribua "muitos"

valores a x, você somente obterá um número *finito* de pontos. Ao ligá-los, que critério adotar para decidir qual das figuras abaixo é a mais razoável?



É bom que você saiba que as técnicas algébricas de que dispomos não são suficientes para decidir isso. É necessário recorrer ao Cálculo Diferencial, onde se aprendem técnicas mais sofisticadas e eficientes para esboçar gráficos de certas funções.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Está fixado um sistema ortogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Escreva a equação reduzida da elipse, dados

a) os focos $(\pm 5, 0)$ e dois vértices $(\pm 13, 0)$;

b) os focos $(0, \pm 6)$ e $a = 17$;

c) dois vértices $(\pm 5, 0)$ e a excentricidade $e = \frac{3}{5}$, onde $e = \frac{c}{a}$. Os focos estão no eixo Ox;

d) os focos $(\pm 1, 0)$, o semi-eixo menor medindo $\sqrt{2}$;

e) as extremidades do eixo menor $(0, \pm 4)$, e o comprimento $L = \frac{8}{5}$ da corda perpendicular ao eixo maior da elipse e que passa por um dos focos;

f) os focos $(0, \pm 2\sqrt{3})$, $L = 2$, L como no item anterior;

g) o centro $(0, 0)$, um dos focos $(0, -\sqrt{40})$, e um ponto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$ da elipse.

2. Para as elípses dadas, determine os vértices, os focos, a excentricidade $(e = \frac{c}{a})$. Faça um esboço.

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$

b) $x^2 + 9y^2 = 9$

c) $2x^2 + y^2 = 50$

d) $3x^2 + 4y^2 = 12$

3. Escreva a equação reduzida da elipse que tem centro na origem, focos num dos eixos coordenados, e passa por A e B.

a) $A = (3, 2)$, $B = (1, 4)$

b) $A = (5, 2)$, $B = (2, 4)$

4. Ache os vértices e a área de um quadrado com lados paralelos aos eixos, inscrito na elipse $9x^2 + 16y^2 = 100$.

5. Obtenha equações das elipses cujos focos e medida do semi-eixo maior são dados.

a) $(-3, 2)$, $(-3, 6)$, $a = 4$

b) $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $a = 3$

c) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $a = 3$

Sugestão É mais cômodo resolver usando a definição de elipse, mas é mais instrutivo usar translações e rotações.

6. Determine os vértices, os focos, a excentricidade $(e = \frac{c}{a})$ e as assíntotas das hipérboles dadas a seguir. Faça um esboço.

a) $25x^2 - 144y^2 = 3600$

b) $16x^2 - 25y^2 = 400$

c) $y^2 - x^2 = 16$

d) $9y^2 - 4x^2 = 36$

e) $3x^2 - y^2 = 3$

7. Escreva a equação reduzida da hipérbole, dados

a) os vértices $(\pm 2, 0)$, e os focos $(\pm 3, 0)$;

b) os vértices $(\pm 15, 0)$, e as assíntotas $5y = \pm 4x$;

c) $b = 4$, as assíntotas $2y = \pm 3x$ (focos no eixo Oy);

d) os focos $(\pm 5, 0)$, e as assíntotas $2y = \pm x$;

e) as assíntotas $y = \pm x$, e um ponto da hipérbole, $(5, 9)$;

f) os focos $(\pm 5, 0)$, e o comprimento $L = \frac{9}{2}$ da corda por um dos focos, perpendicular a $F_1 F_2$.

8. Obtenha equações das hipérboles, dados os focos e a.

a) $(3, -3)$, $(3, 7)$, $a = 3$

b) $(3, 4)$, $(-1, -2)$, $a = 1$

Veja a sugestão do Exercício 5.

9. Determine os focos, os vértices e as diretrizes, das parábolas dadas a seguir. Faça um esboço.

a) $y^2 = 16x$ b) $y^2 + 28x = 0$ c) $x^2 + 40y = 0$

d) $5y^2 = 12x$ e) $2x^2 = 7y$ f) $7x^2 = 15y$

10. Escreva as equações reduzidas das parábolas com vértice na origem, dados

a) o foco $(8, 0)$;

b) a diretriz $y = 2$;

c) o eixo de simetria Ox e um ponto da parábola, (5, 10);

d) dois pontos da parábola, (6, 18) e (–6, 18);

e) um ponto da diretriz, (4, 7), e o eixo de simetria Ox.

11. Ache as equações das parábolas de focos e diretrizes dados abaixo.

a) (2, 3) , $x = 0$

b) (3, 1) , $y + 3 = 0$

c) (–4, -2) , $2x + y = 3$

Veja a sugestão do Exercício 5.

§2 Cônicas (caso geral)

Definição Dado num plano π um sistema ortogonal de coordenadas, e dada a equação

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (14)$$

com $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, chama-se *cônica* ao conjunto dos pontos $P = (x, y)$ de π tais que (14) se verifica.

Exemplos de cônicas

1) O conjunto vazio: $G(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$

2) Um ponto: $G(x, y) = x^2 + y^2 = 0$

3) Uma reta: $G(x, y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$

4) Reunião de duas retas paralelas:

$$G(x, y) = (x + y)(x + y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$$

5) Reunião de duas retas concorrentes: $G(x, y) = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 0$

6) Elipse: $G(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

7) Hipérbole: $G(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

8) Parábola: $G(x, y) = x - y^2 = 0$

9) Circunferência: $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Provaremos no § 3 que estes nove casos esgotam as possibilidades. Nos exemplos acima não há nenhuma dificuldade em se reconhecer a cônica, a partir de sua equação. Já não se pode dizer o mesmo dos seguintes:

$35x^2 - 2xy + 35y^2 - 34x - 34y - 289 = 0$ (elipse)

$3x^2 + 12xy + 8y^2 - 18x - 28y + 11 = 0$ (hipérbole)

$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 15 = 0$ (vazio)

Neste parágrafo o nosso objetivo é reconhecer a cônica e esboçar seu gráfico, conhecida sua equação.

Roteiro

1) Procure eliminar por meio de uma translação os termos de 1º grau. Proceda como indicado em (I), no §3, capítulo anterior. O(s) ponto(s) (h, k) lá indicado(s) se chama(m) centro(s) (de simetria) da cônica(*).

2) Admitindo que isso possa ser feito, procure eliminar o termo em uv através de uma rotação, como se indica em (II), §3, Capítulo 20. Chega-se a uma equação da forma $A't^2 + C'w^2 + F' = 0$, e daí é fácil o reconhecimento(**).

(*) Esse nome advém do fato seguinte: se P está na cônica, também está o seu simétrico em relação ao centro. Basta observar a equação da cônica, quando se translada o sistema inicial: $Au^2 + Buv + Cv^2 + F' = 0$. Se (u, v) a satisfaz, então $(-u, -v)$ também a satisfaz. Observe que as parábolas são as únicas cônicas que não têm centro (apesar de terem um eixo de simetria). Elipses, hipérboles, circunferências, pontos e reuniões de duas retas concorrentes possuem centro único. Retas, reuniões de duas retas paralelas e vazio têm infinitos centros.

(**) Note que esta última equação só apresenta expoentes pares para t e w, e portanto, como já comentamos no §1, ela descreve um conjunto simétrico em relação aos eixos O't e O'w. Eis aí o significado geométrico do processo.

3) Se não pudermos eliminar os termos de 1º grau, paciência. Efetuamos uma rotação para eliminarmos o termo em xy.

Observação

Foi visto, no Exercício 4 do §3 do capítulo anterior, que $B^2 - 4AC = -4A'C'$ (pois aqui $B' = 0$). Usando este fato, não é difícil tirar as seguintes conclusões, que ajudam a conferir resultados (daremos mais detalhes no próximo parágrafo).

- Se $B^2 - 4AC < 0$, a cônica só pode ser: vazio, ponto, circunferência ou elipse.
- Se $B^2 - 4AC = 0$, a cônica só pode ser: reta, reunião de duas retas paralelas, parábola, ou vazio.
- Se $B^2 - 4AC > 0$, trata-se necessariamente de reunião de duas retas concorrentes, ou de hipérbole.

Por causa disso, dizemos que a equação (14) é de *tipo elíptico* quando $B^2 - 4AC < 0$, de *tipo parabólico* quando $B^2 - 4AC = 0$, e de *tipo hiperbólico* quando $B^2 - 4AC > 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Está fixado um sistema ortogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Esboçar o gráfico da cônica de equação

$$G\ (x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

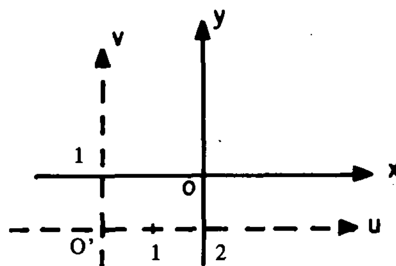
Resolução

- $B^2 - 4AC = 16 - 4.4.7 < 0$ (tipo elíptico). As possibilidades são: vazio, ponto, circunferência, elipse.
- Fazendo $x = u + h$, $y = v + k$, e substituindo na equação, obteremos

$$4u^2 + 4uv + 7v^2 + (8h - 4k + 12)\,u + (-4h + 14\,k + 6)v + G(h, k) = 0$$

Igualando os coeficientes de u e v a 0 resulta

$$\begin{cases} 8h - 4k = -12 \\ -4h + 14k = -6 \end{cases}$$

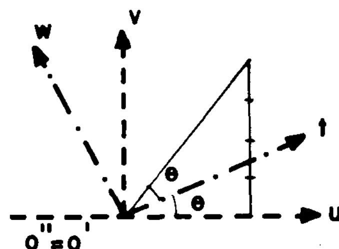


de onde resulta $h = -2$, $k = -1$.

A equação no novo sistema fica

$$4u^2 - 4uv + 7v^2 - 24 = 0$$

- Vamos agora eliminar o termo uv.



Sendo $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{-4}{4-7} = \dfrac{4}{3}$,

podemos escolher 2θ no 1º quadrante.

Calculamos A' e C', que são raízes de

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo, encontramos $\lambda = 3$ e $\lambda = 8$. Para decidir quem é A' e quem é C', observe que (fórmula (20) do Capítulo 20)

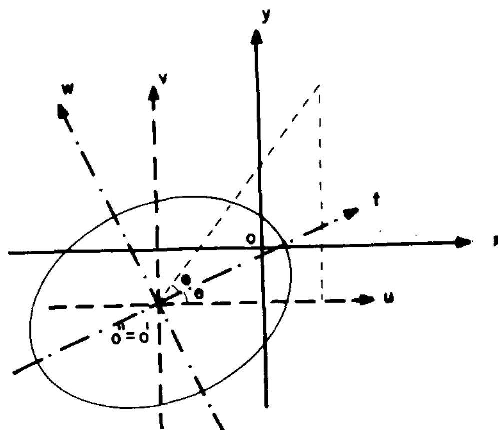
$$\cos 2\theta = \frac{4-7}{A'-C'} = \frac{-3}{A'-C'}$$

Como $\cos 2\theta > 0$, resulta $A' - C' < 0 \therefore A' < C'$.

Logo $A' = 3$, $C' = 8$. A equação final é (lembre-se que o termo independente F' não se altera por rotação) $3t^2 + 8w^2 - 24 = 0$, ou seja

$$\frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$

É uma elipse. Eis o esboço procurado:



2) Idem para $G(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Resolução

- $B^2 - 4AC = 4 - 4 = 0$ (tipo parabólico). As possibilidades são: reta, reunião de duas retas paralelas, parábola, ou vazio.

- Tentemos a eliminação dos termos de 1º grau:

  Fazendo $x = u + h$, $y = v + k$, resulta

  $$u^2 - 2uv + v^2 + (-2k + 2h - 2)u + (2k - 2h - 2)v + G(h, k) = 0$$

  Igualando os coeficientes de u e v a zero, resulta

  $$\begin{cases} -2k + 2h = 2 \\ 2k - 2h = 2 \end{cases}$$

  claramente incompatível. Logo não existe centro, o que nos dá a certeza de que se trata de uma parábola.

- Vamos à rotação. Como $A = C$, tomemos $\theta = \frac{\pi}{4}$. Como vimos no Capítulo 20, temos:

$$A' = \frac{1}{2}(A + B + C) = 0$$

$$C' = \frac{1}{2}(A - B + C) = 2$$

$$D' = D \cos\frac{\pi}{4} + E \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

$$E' = -D \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + E \cos\frac{\pi}{4} = 0$$

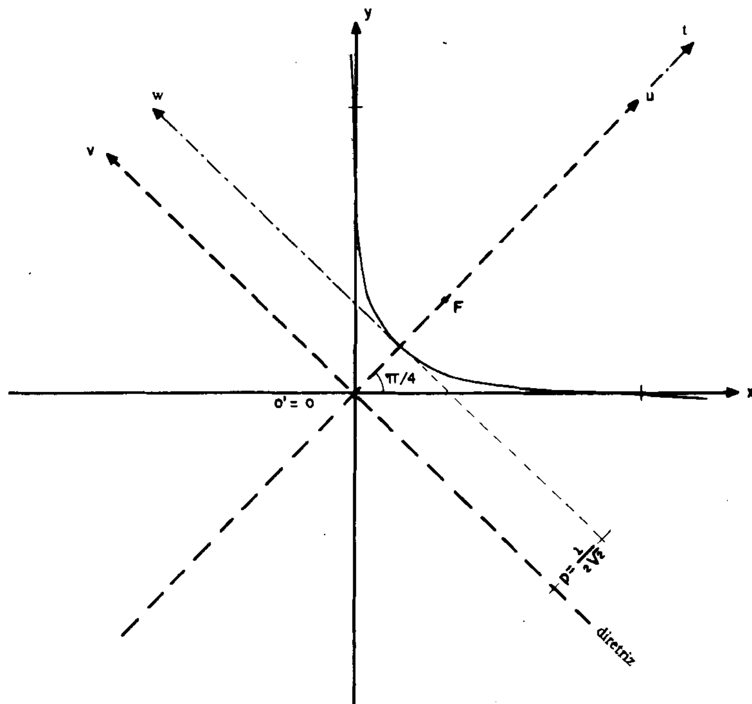
$$F' = 1$$

(Note que por ser $B^2 - 4AC = 0$ já era previsto que ou $A' = 0$ ou $C' = 0$.)

A equação fica

$$2v^2 - 2\sqrt{2}\, u + 1 = 0$$

que é uma parábola, que você já deve saber desenhar. Escrevendo a última equação na forma $v^2 - \sqrt{2}\,(u - \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0$, pode-se ainda fazer a translação $w = v$, $t = u - \frac{1}{2\sqrt{2}}$, para obter a equação reduzida $w^2 = \sqrt{2}\, t$. Eis a resposta:



3. Idem para $G(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0.$

Resolução

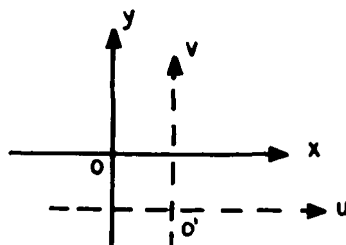
- $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$ (tipo parábolico). Pode ser reta, reunião de duas retas paralelas, parábola, ou vazio.

- Para eliminar os termos de 1º grau, fazemos $x = u + h$, $y = v + k$, obtendo

$$u^2 - 4uv + 4v^2 + (-4k + 2h - 6)u + (8k - 4h + 12)v + G(h, k) = 0$$

Igualando a 0 os coeficientes de u e de v, vem

$$\begin{cases} -4k + 2h = 6 \\ 8k - 4h = -12 \end{cases}$$



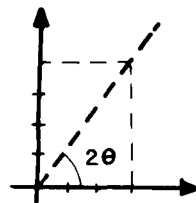
sistema compatível, indeterminado (logo não se trata de parábola). Escolhemos uma solução, digamos $h = 1$, $k = -1$. Com isso, a equação fica

$$u^2 - 4uv + 4v^2 - 1 = 0$$

- Para eliminar o termo em uv, calculamos

$$\text{tg } 2\theta = \frac{-4}{1-4} = \frac{4}{3}$$

e escolhemos 2θ no 1º quadrante. A' e C' são as raízes de



$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

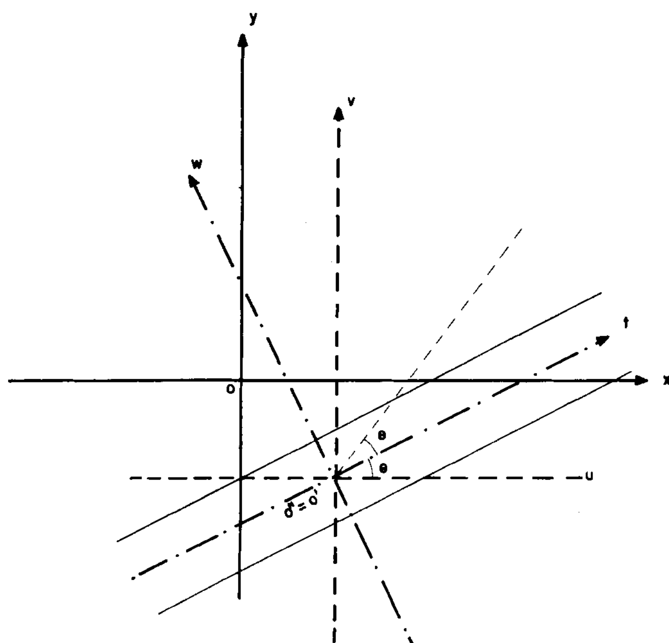
que são 0 e 5. Para saber quem é A' e quem é C', examinamos

$$\cos 2\theta = \frac{1-4}{A'-C'}$$

Como $\cos 2\theta > 0$ pela escolha acima, resulta $A' - C' < 0$, logo, $A' < C'$, e daí $A' = 0$, $C' = 5$. A equação final é

$$5w^2 - 1 = 0 \qquad \text{ou seja,} \qquad w = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Trata-se da reunião de duas retas paralelas.



Agora repare que este exercício poderia ter sido resolvido de um modo todo especial, pela fatoração do polinômio G (x, y):

$$G(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8$$

$$= (x - 2y)^2 - 6(x - 2y) + 8 = (x - 2y - 2)(x - 2y - 4)$$

Logo

$$G(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

e portanto a cônica é a reunião das retas paralelas descritas acima. De qualquer modo, se você não perceber essa possibilidade e fizer a translação, obtendo a equação $u^2 - 4uv + 4v^2 - 1 = 0$, ainda resta a alternativa de fatorar:

$$u^2 - 4uv + 4v^2 - 1 = (u - 2v)^2 - 1 = 0$$

que implica $u - 2v = 1$ ou $u - 2v = -1$, e novamente temos as duas retas paralelas, desta vez referidas ao sistema $O'uv$.

Vale a pena ficar atento a esses casos especiais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Está fixado um sistema ortogonal de coordenadas $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Esboçar o gráfico da cônica representada por

a) $G(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

b) $G(x, y) = x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}\,xy - 1 = 0$

c) $G(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0$

d) $G(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$

e) $G(x, y) = 7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}\,xy - (14 + 2\sqrt{3})\,x - (10 + 2\sqrt{3})\,y + 8 + 2\sqrt{3} = 0$

f) $G(x, y) = 16x^2 - 108xy - 29y^2 + 260 = 0$

g) $G(x, y) = 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

2. Reduza a equação à forma mais simples, através de translação eventual e rotação. Dê o ângulo de rotação. Descreva o conjunto representado.

a) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

b) $7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 - 16 = 0$

c) $x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$

d) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}\,x - 16\sqrt{5}\,y = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2xy - 8\sqrt{2}\,x - 8\sqrt{2}\,y = 0$

f) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$

g) $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$

h) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

3. Reconheça as cônicas dadas a seguir:

a) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$

b) $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$

c) $5x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

d) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$

e) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$

f) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

g) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 1 = 0$

h) $16x^2 + 16y^2 - 16x + 8y - 59 = 0$

§3 Classificação das cônicas

Como vimos no parágrafo anterior, o processo para esboçar o gráfico de uma cônica é em geral laborioso. Porém, se o interesse for apenas o de reconhecer a cônica, vimos que há alguns "atalhos" que encurtam o caminho, como por exemplo a análise do sinal de $B^2 - 4AC$. Vamos agora sistematizar esses procedimentos para ver como se pode reconhecer a cônica de um modo relativamente simples, através da análise dos coeficientes de sua equação.

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas $(0, \vec{i}, \vec{j})$ em E^2. Sendo

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \tag{15}$$

a equação de uma cônica, associamos a ela a matriz (simétrica).

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{bmatrix} \tag{16}$$

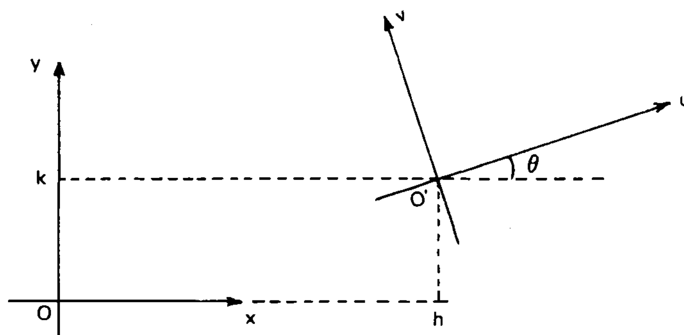
e os números

$$\Delta_1 = A + C \ , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{vmatrix} = -\frac{B^2 - 4AC}{4}, \ \Delta_3 = \det M \tag{17}$$

Considere a mudança de coordenadas dada por

$$\begin{cases} x = h + u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta \\ y = k + u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta \end{cases} \tag{18}$$

que corresponde a uma translação seguida de uma rotação (roto-translação; observe que o novo sistema de coordenadas também é ortogonal).



Substituindo (18) em (15) resulta uma equação da forma

$$g(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$$

à qual fica associada uma matriz

$$m = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

e correspondentes números

$$\delta_1 = a + c \ , \qquad \delta_2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4} \ , \qquad \delta_3 = \det m$$

Proposição 1 Valem as igualdades $\delta_1 = \Delta_1$, $\delta_2 = \Delta_2$, $\delta_3 = \Delta_3$ (isso quer dizer que os números Δ_1, Δ_2 e Δ_3 são invariantes por roto-translações, por isso são chamados *invariantes ortogonais* da cônica dada).

Demonstração Para as duas primeiras igualdades, veja os Exercícios 4 e 5 do §3, Capítulo 20. Quanto à terceira, observe inicialmente que o 1º membro de (15) pode ser colocado sob forma matricial (faça os cálculos para constatar isso):

$$G(x, y) = [x \ y \ 1] \ M \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Além disso, usando (18) vemos, após um cálculo matricial simples, que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & h \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpondo, obtemos ainda

$$[x \ \ y \ \ 1] = [u \ \ v \ \ 1]\, T^t$$

Substituindo na expressão de G (x, y) obtemos

$$g(u,v) = [u \quad v \quad 1]\ (T^t M T) \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mas, a exemplo de G (x, y), podemos escrever

$$g(u,v) = [u \quad v \quad 1] \quad m \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comparando as duas últimas igualdades vem

$$m = T^t M T$$

de onde resulta

$$\delta_3 = \det M = \det T^t . \det M . \det T = \det M = \Delta_3$$

já que $\det T = \det T^t = 1$.

Observação

Uma alternativa para demonstrar a invariança de Δ_2, você pode ver no Exercício 2.

Para a próxima Proposição, será útil o lema seguinte, cuja demonstração é imediata e será deixada como exercício.

Lema Seja $g(u,v) = cv^2 + du + ev + f$

a) Se $c \neq 0$ e $d \neq 0$, então a mudança de variáveis (translação) $u = X - \frac{f}{d} + \frac{e^2}{4cd}$, $v = Y - \frac{e}{2c}$, transforma $g(u,v)$ em $cY^2 + dX$.

b) Se $c \neq 0$ e $d = 0$, então a mudança de variáveis (translação) $v = Y - \frac{e}{2c}$ $(u = X)$ transforma $g(u,v)$ em $cY^2 + q$ (onde $q = f - \frac{e^2}{4c}$).

Observação As translações acima não "caíram do céu". São motivadas pela conhecida técnica de completação de quadrados:

$$cv^2 + ev = c(v^2 + \frac{e}{c}v) = c\ [v^2 + 2 \cdot \frac{e}{2c}v + (\frac{e}{2c})^2 - (\frac{e}{2c})^2]$$

$$= c\ [(v + \frac{e}{2c})^2 - \frac{e^2}{4c^2}] = c(v + \frac{e}{2c})^2 - \frac{e^2}{4c^2}$$

Proposição 2 Considere a cônica dada por (15).

a) Se $\Delta_2 \neq 0$, existe um sistema de coordenadas ortogonal, em relação ao qual a equação da cônica tem a forma

$$pX^2 + qY^2 + r = 0 \qquad (p^2 + q^2 \neq 0)$$

b) Se $\Delta_2 = 0$, então

b_1) se $\Delta_3 \neq 0$, existe um sistema ortogonal de coordenadas, em relação ao qual a cônica tem equação da forma

$$pY^2 + qX = 0 \qquad (p \neq 0, \quad q \neq 0)$$

b_2) se $\Delta_3 = 0$, existe um sistema ortogonal de coordenadas, em relação ao qual a cônica tem equação da forma

$$pY^2 + q = 0 \qquad (p \neq 0)$$

Demonstração

a) Decorre do trabalho desenvolvido no § 3 do Capítulo 20. De fato, $\Delta_2 = \frac{4AC - B^2}{4}$ sendo não-nulo, podemos fazer uma translação para eliminar os termos de 1º grau; como sempre é possível fazer uma rotação para eliminar o termo misto de 2º grau, obtemos após essa roto-translação um sistema ortogonal satisfazendo às condições do enunciado.

b) Suponhamos $\Delta_2 = 0$. Efetuando uma rotação para eliminar o termo misto de 2º grau, obtemos um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual a equação da cônica tem a forma

$$au^2 + cv^2 + du + ev + f = 0 \qquad (19)$$

onde a e c são raízes de

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B/2 \\ B/2 & C-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Agora

$$m = \begin{bmatrix} a & 0 & d/2 \\ 0 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

e pela Proposição 1 temos

$$\Delta_1 = a + c \quad , \quad \Delta_2 = ac \quad , \quad \Delta_3 = acf - \frac{cd^2}{4} - \frac{ae^2}{4} \tag{20}$$

De $\Delta_2 = 0$ segue que $a = 0$ ou $c = 0$, não podendo ser ambos nulos, senão a equação (15) não seria de 2º grau (veja o Exercício 4b, §3 do Capítulo 20). Suponhamos $a = 0$ e $c \neq 0$ (o outro caso é análogo e fica como exercício). Então, (20) fornece

$$\Delta_3 = -\frac{cd^2}{4} \tag{21}$$

e (19) se reduz a

$$cv^2 + du + ev + f = 0 \tag{22}$$

b_1) Se $\Delta_3 \neq 0$, (21) nos assegura que $d \neq 0$ e o resultado segue da parte a) do Lema anterior, aplicada a (22), tomando $p = c$ e $q = d$.

b_2) Se $\Delta_3 = 0$, (21) nos dá $d = 0$, e o resultado segue agora da parte b) do referido Lema, tomando $p = c$.

Corolário Seja Ω um subconjunto de E^2.

(i) Ω é uma cônica se e somente se Ω é de um dos seguintes tipos:

1) vazio
2) conjunto de um único ponto
3) reta
4) reunião de duas retas paralelas
5) reunião de duas retas concorrentes
6) elipse
7) parábola
8) hipérbole
9) circunferência

(ii) Se $\Omega \neq \phi$, então $\Delta_3 = 0$ se e somente se Ω é de um dos tipos 2), 3), 4), 5) do item (i).

Demonstração

(i) Vamos estudar o caso $\Delta_2 \neq 0$, deixando o outro caso como exercício. Pela Proposição 2, existe um sistema de coordenadas em relação ao qual a equação da cônica tem a forma

$$pX^2 + qY^2 + r = 0 \qquad (p^2 + q^2 \neq 0) \qquad (23)$$

I) Suponhamos $r \neq 0$.

Ia) Se p, q, r têm mesmo sinal, então $\Omega = \phi$.

Ib) Se p, q, r não têm mesmo sinal, então (23) pode representar uma elipse, uma circunferência ou uma hipérbole.

II) Suponhamos $r = 0$. De (23) segue

$$pX^2 + qY^2 = 0 \qquad (p^2 + q^2 \neq 0) \qquad (24)$$

IIa) Se p e q têm mesmo sinal, então $pX^2 = qY^2 = 0$. Logo, Ω é formado por um único ponto.

IIb) Se p e q têm sinais contrários, então (24) representa a reunião de duas retas concorrentes.

(ii) Deixamos como exercício, lembrando que pela Proposição 1 e por (23) tem-se $\Delta_3 = p\,q\,r$.

Observação

O conjunto vazio está "fora do alcance" do item (ii); as equações $x^2 + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 + 1 = 0$ representam, ambas, o conjunto vazio, mas para a primeira $\Delta_3 = 0$ e para a segunda, $\Delta_3 = 1$.

Vamos agora ver como se aplicam esses resultados.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Está fixado um sistema ortogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Reconheça a cônica de equação

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

(veja o Exercício Resolvido nº 1, §2).

Resolução

Temos

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 7 & 3 \\ \hline 6 & 3 & -9 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 11 \\ \Delta_2 = 4 \,.\, 7 - (-2) \,.\, (-2) = 24 \neq 0 \\ \Delta_3 = \det M = -576 \neq 0 \end{array}$$

Como $\Delta_2 \neq 0$, existe, pela Proposição 2, um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual a equação da cônica é da forma $pX^2 + qY^2 + r = 0$

$$m = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \delta_1 = p + q \\ \delta_2 = pq \\ \delta_3 = pqr \end{array}$$

Pela Proposição 1 devemos ter

$$\begin{cases} pqr = -576 \\ pq = 24 \\ p + q = 11 \end{cases}$$

de onde resulta facilmente $p > 0$, $q > 0$, $r < 0$. Trata-se portanto de elipse ou circunferência. Das igualdades $pq = 24$ e $p + q = 11$ conclui-se imediatamente que $p \neq q$. Logo, a cônica não é circunferência. Trata-se, pois, de uma elipse.

Observação

Caso se queira a equação da elipse na forma reduzida, basta resolver o sistema acima. Obtém-se $p = 3$, $q = 8$ (ou $p = 8$, $q = 3$) e $r = -24$. A equação é, pois, $3X^2 + 8Y^2 - 24 = 0$, ou seja,

$$\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{3} = 1$$

A escolha da outra solução fornece $\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{8} = 1$. Este método não permite obter a medida θ do ângulo de rotação, de modo que não temos elementos para esboçar o gráfico da cônica.

2. Idem para $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (veja o Exercício Resolvido nº 2, §2).

Resolução

Seguindo os passos da resolução do exercício anterior, temos

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = -4 \end{array}$$

Pela Proposição 2, existe um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a cônica é dada por uma equação da forma $pY^2 + qX = 0$. Sendo

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q/2 \\ 0 & p & 0 \\ q/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \delta_1 &= p \\ \delta_2 &= 0 \\ \delta_3 &= -\frac{pq^2}{4} \end{aligned}$$

a Proposição 1 nos leva a

$$\begin{cases} p = 2 \\ 0 = 0 \\ -\dfrac{pq^2}{4} = -4 \end{cases}$$

ou seja, $p = 2$, $q = \sqrt{8}$, ou $p = 2$, $q = -\sqrt{8}$. Trata-se, pois, de uma parábola.

Observação

Num certo sistema de coordenadas, a parábola tem por equação $2X^2 + \sqrt{8}\ Y = 0$. Num outro, $2X^2 - \sqrt{8}\ Y = 0$. Novamente, faltam-nos subsídios para determinar θ e esboçar a parábola.

3. Idem para $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$ (veja o Exercício Resolvido nº 3, §2).

Resolução

Temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= 5 \\ \Delta_2 &= 0 \\ \Delta_3 &= 0 \end{aligned}$$

e portanto em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, a cônica tem equação da forma $pY^2 + q = 0$. Neste caso

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \delta_1 &= p \\ \delta_2 &= 0 \\ \delta_3 &= 0 \end{aligned}$$

e o sistema que se obtém igualando os invariantes só fornece $p = 5$. Mas, observando a equação $pY^2 + q = 0$, vemos que só pode representar: reta, reunião de duas retas paralelas, ou o vazio. Determinemos então a interseção da cônica com os eixos Ox e Oy. Fazendo $x = 0$ na equação original, resulta $4y^2 + 12y + 8 = 0$ e daí $y = -2$ ou $y = -1$. Fica claro que se trata da reunião de duas retas paralelas.

4. Idem para $x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$.

Resolução

Temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= 2 \\ \Delta_2 &= 0 \\ \Delta_3 &= 0 \end{aligned}$$

e a situação é a mesma do exercício anterior. Determinemos a interseção da cônica com Oy. Fazendo $x = 0$ na equação dada vem $y^2 - y + 1 = 0$, que não tem raízes reais; logo, a cônica não intercepta Oy.

Agora, com Ox. Fazendo $y = 0$ na equação dada resulta $x^2 + x + 1 = 0$, que também não possui raízes reais.

Conclusão: Trata-se do conjunto vazio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Está fixado um sistema ortogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Faça o reconhecimento das cônicas dadas nos exercícios propostos no §2, usando os métodos deste parágrafo.

2. a) Mostre que a parte quadrática de (15) pode ser escrita matricialmente sob a forma

$$[x \quad y]\, P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad P = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

b) Mostre que (18) pode ser posta sob a forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + Q \quad \text{onde} \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

c) Combinando a) e b) e procedendo como na demonstração da invariança de Δ_3, prove a invariança de Δ_2.

CAPÍTULO 22

SUPERFÍCIES

Neste capítulo está fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

§1 Superfície esférica

1.1 Equação reduzida e equação geral

Dados um ponto $C \in E^3$ e um número real $r > 0$, a superfície esférica S de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos de E^3 que distam r do ponto C. Assim, pondo

$$P = (x, y, z) \quad , \quad C = (x_0, y_0, z_0)$$

temos $P \in S$ se e somente se $d(P, C) = r$, isto é,

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2} \qquad (1)$$

A equação (1) é chamada *equação reduzida* de S. Assim, por exemplo,

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$$

é a equação reduzida de uma superfície esférica de centro $C = (-1, 2, 0)$ e raio $r = \sqrt{4} = 2$.

Desenvolvendo os quadrados em (1), obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0 \quad (2)$$

que é uma equação da forma

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0} \quad (3)$$

com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, chamada *equação geral* de S.

Surgem imediatamente duas questões:

1ª) dada uma equação da forma (3), como decidir se ela é equação geral de alguma superfície esférica S?

2ª) em caso afirmativo, como obter, a partir da equação, as coordenadas do centro e o raio de S?

Para respondê-las, basta completar os quadrados e colocar (3) sob a forma (1); se o 2º membro for negativo, o lugar geométrico é vazio; se for nulo, ele se reduz a um ponto; e se for positivo, trata-se de uma superfície esférica cujo raio é a raiz quadrada desse 2º membro e cujo centro se obtém observando o 1º membro. Assim:

$$x^2 + ax = (x^2 + ax + \frac{a^2}{4}) - \frac{a^2}{4} = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 + by = (y^2 + by + \frac{b^2}{4}) - \frac{b^2}{4} = (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$z^2 + cz = (z^2 + cz + \frac{c^2}{4}) - \frac{c^2}{4} = (z + \frac{c}{2})^2 - \frac{c^2}{4}$$

Substituindo em (3), vem:

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

donde

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}$$

Então, (3) é a equação geral de uma superfície esférica se e somente se

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0 \tag{4}$$

e nesse caso, o centro é

$$\boxed{C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)} \tag{5a}$$

e o raio é

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}} \tag{5b}$$

Observações

1. Se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$, a única solução de (3) é o ponto C (veja (5a)) e portanto o lugar geométrico é $\{C\}$. Se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$, o lugar geométrico é vazio.

2. Na obtenção da equação (3), notamos que os coeficientes a, b e c dependem exclusivamente das coordenadas do centro de S. O raio r influi apenas no termo independente d (compare com (2)). Segue-se daí que a equação

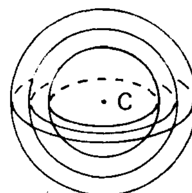
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + \lambda = 0 \tag{6}$$

onde λ é um parâmetro real, sujeito à condição

$$\lambda < \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

(veja (4)), representa um feixe de superfícies esféricas concêntricas, com centro

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dê a equação geral da superfície esférica de centro (1, -1, 3) e raio 4.

Resolução

Usando (1) temos:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 16.$$

Eliminando os parênteses e passando para a forma (3), obtemos a equação geral procurada:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5 = 0.$$

2. Verifique se a equação $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z+12=0$ é a equação de uma superfície esférica. Caso seja, dê o centro e o raio.

Resolução

Completemos os quadrados:

$$x^2-4x = x^2-2.\ \frac{4}{2}.\ x = x^2-2.\ 2x+2^2-2^2 = (x-2)^2-4$$

$$y^2-2y = y^2-2.\ 1.\ y = y^2-2.\ 1.\ y+1^2-1^2 = (y-1)^2-1$$

$$z^2+8z = z^2+2.\ \frac{8}{2}.\ z = z^2+2.\ 4.\ z = z^2+2.\ 4.\ z+4^2-4^2 = (z+4)^2-16$$

Substituindo na equação dada, resulta

$$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+(z+4)^2-16+12=0$$

$$\therefore\quad (x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2 = 9 = 3^2$$

Portanto, trata-se de uma superfície esférica de centro $C = (2, 1, -4)$ e raio $r = 3$.

3. Idem para $x^2+y^2+z^2-\sqrt{3}x-4y+8=0$.

Resolução

Completando quadrados:

$$x^2 - \sqrt{3}x = x^2 - 2 . \frac{\sqrt{3}}{2} . x + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$= (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{3}{4}$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2.\ 2.\ y = y^2 - 2.\ 2.\ y + 2^2 - 2^2 = (y-2)^2 - 4$$

Substituindo na equação dada vem que

$$(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (y-2)^2 + z^2 - \frac{3}{4} - 4 + 8 = 0$$

ou seja

$$(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (y-2)^2 + z^2 + \frac{13}{4} = 0$$

Vemos claramente que não existem x, y, z que satisfaçam essa equação. Logo, a equação dada não representa uma superfície esférica, mas sim o conjunto vazio.

4. Ache a equação geral da superfície esférica que passa pelos pontos (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3).

Resolução

A equação procurada será da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Impondo que os pontos dados satisfaçam essa equação resulta

$$\begin{cases} 0^2 + 0^2 + 0^2 + a.0 + b.0 + c.0 + d = 0 \\ 1^2 + 0^2 + 0^2 + a.1 + b.0 + c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 2^2 + 0^2 + a.0 + b.2 + c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 3^2 + a.0 + b.0 + c.3 + d = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + a + d = 0 \\ 4 + 2b + d = 0 \\ 9 + 3c + d = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, vem

$$a = -1, \qquad b = -2, \qquad c = -3.$$

Portanto, teremos por resposta

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0^{(*)}$$

5. Ache o raio da superfície esférica que passa pelos pontos $(-2, 1, \sqrt{26})$, $(1, 2, -4)$, $(2, 2, 3)$ e cujo centro está no plano Oxy.

Resolução

Como queremos o raio r, escrevemos a equação procurada na forma

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2$$

Como $C = (m, n, p)$ está no plano Oxy, temos $p = 0$.

Levando isto à equação acima, e impondo que os pontos dados estejam na superfície, vem que

$$\begin{aligned} (-2 - m)^2 + (1 - n)^2 + (\sqrt{26})^2 &= r^2 \\ (1 - m)^2 + (2 - n)^2 + (-4)^2 &= r^2 \\ (2 - m)^2 + (2 - n)^2 + 3^2 &= r^2 \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

(*) Em princípio, deveríamos verificar se esta é equação de uma superfície esférica, o que é equivalente a verificar se os pontos dados não são coplanares. Mas isto não é necessário, pois o sistema obtido admitiu solução única (veja o Exercício 12).

Resolvendo o sistema acima, obtemos $m = -2$, $n = 1$, e $r = \sqrt{26}$.



6. Dê a equação geral da superfície esférica S_1, concêntrica com a superfície esférica $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z = 0$ e que passa pelo ponto $P = (1, 1, 0)$.

Resolução

Por (6), temos:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z + \lambda = 0$$

As coordenadas de P satisfazem essa equação, logo $1 + 1 + 0 - 2 + 3 - 0 + \lambda = 0$, donde $\lambda = -3$. Então

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z - 3 = 0$$

7. Localize os pontos $M = (1, 2, 1)$, $N = (-1, -1, 0)$ e $Q = (1, 0, -1)$ em relação à superfície esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - z - 1 = 0$.

Resolução

Devemos comparar as distâncias dos pontos dados ao centro de S, com o raio de S. Um jeito rápido de se fazer isso é notar inicialmente que o primeiro membro da equação geral (3) nada mais é que $d(P, C)^2 - r^2$ (releia a obtenção de (3) a partir de (1), passando por (2)). Assim, para localizar um ponto P em relação a uma superfície esférica S, basta substituir suas coordenadas no 1º membro da equação geral de S. Se o resultado obtido for negativo, P é interior a S; se for positivo, P é exterior a S; se for nulo, $P \in S$. Resolvamos então o exercício:

$$M : 1 + 4 + 1 - 2 + 8 - 1 - 1 = 10 > 0 \therefore M \text{ é exterior a } S$$

$$N : 1 + 1 + 0 + 2 - 4 - 0 - 1 = -1 < 0 \therefore N \text{ é interior a } S$$

$$Q : 1 + 0 + 1 - 2 + 1 - 1 = 0 \therefore Q \in S$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache uma equação da superfície esférica de centro C e raio r nos casos

   a) $C = (1, -1, -3)$ $\quad r = 2$

   b) $C = (0, 0, 0)$ $\quad r = 1$

   c) $C = (\sqrt{2}, 1, -3)$ $\quad r = \sqrt{2}$

   d) $C = (18, -17, -1)$ $\quad r = 50$

   e) $C = (0, 1, 0)$ $\quad r = 4$

2. Verifique se as equações dadas são equações de superfícies esféricas. Caso afirmativo, dê o centro e o raio.

   a) $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 + z^2 = 25$

   b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$

   c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

   d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$

   e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 16 = 0$

   f) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 2y - 4z + 7 = 0$

   g) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x - 8y - 8z + 10 = 0$

   h) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 15 = 0$

   i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

3. Ache uma equação da superfície esférica que passa pelos pontos (1, 0, 0), (0, 1, 0), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, (0, 0, 1).

4. Ache uma equação da superfície esférica de centro (1, 1, 2) que passa pelo ponto (1, 1, 3).

5. Os pontos $A = (2, -3, -5)$ e $B = (4, 1, -3)$ são extremidades de um diâmetro de uma superfície esférica. Ache uma sua equação.

6. Ache uma equação da superfície esférica que passa pelos pontos $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e cujo centro está no plano $x + y - z = 0$.

7. Ache uma equação da superfície esférica que tem centro na reta $r : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e passa pelos pontos $A = (6, -1, 3)$ e $B = (0, 7, 5)$.

8. Dê equações na forma simétrica da reta perpendicular ao plano $10x - 2y + 4z - 1 = 0$ e que contém um diâmetro da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$.

9. Calcule a distância do ponto $P = (1, -1, 3)$ à superfície esférica

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$$

(isto é, a distância mínima de P aos pontos de S).

10. Mostre que, se $k < 0$, a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + k = 0$$

representa uma superfície esférica, quaisquer que sejam a, b, c reais.

11. Mostre que para todo $\phi \in \mathbb{R}$ e para todo $\theta \in \mathbb{R}$, o ponto de coordenadas $x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = a \cos \phi$ pertence à superfície esférica de centro na origem e raio $a > 0$. Faça uma figura e descubra o que são ϕ e θ. Você já ouviu falar em coordenadas esféricas?

12. Seja $p(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d$. Sejam $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Prove que são equivalentes as afirmações:

(a) $A_1 . A_2 . A_3 , A_4$ não são coplanares.

(b) O sistema $p(x_i . y_i , z_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, nas incógnitas a, b, c, d, tem solução única.

(c) Existe uma única superfície esférica que passa por A_1 , A_2 , A_3 , A_4.

13. Mostre que os lugares geométricos descritos abaixo são superfícies esféricas e determine seus centros e seus raios:

a) l.g. dos pontos cuja distância à origem é o dobro de sua distância a $A = (10, 0, 0)$.

b) l.g. dos pontos cujas distâncias a $B = (-2, 2, -2)$ e $D = (3, -3, 3)$ estão na razão 2: 3.

c) l.g. dos pontos tais que a soma dos quadrados de suas distâncias aos eixos coordenados é 30.

d) l.g. dos pontos tais que a soma dos quadrados de suas distâncias aos planos

$\pi_1 : x - y + 4 = 0$, $\pi_2 : x + y - 2 = 0$ e $\pi_3 : z + 1 = 0$ é 20.

e) l.g. dos pontos X tais que $\overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{QX}$. Dados: $P = (1, 1, 0)$ e $Q = (0, 1, 0)$.

14. Mostre que se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, então a equação

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

representa a superfície esférica que tem P_1P_2 como diâmetro.

15. Localize os pontos $A = (2, -1, 3)$ e $B = (3, -1, 0)$ em relação à superfície esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 7 = 0$.

16. Dê uma equação da superfície esférica de centro $(2, 3, -1)$, que determina sobre a reta

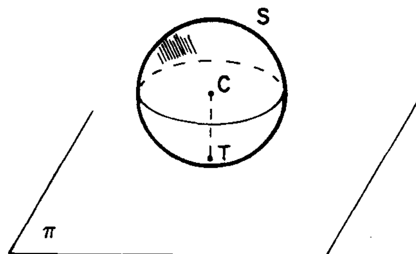
$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

uma corda de comprimento 16.

17. Determine o diâmetro da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$ que é perpendicular ao plano $x - y - 2 = 0$.

1.2 Plano tangente

Seja S uma superfície esférica de centro C e raio r. Se π é um plano tangente a S no ponto $T \in S$ (ponto de tangência), então $\pi \cap S$ se reduz a um único ponto, precisamente o ponto T. Além disso, o segmento CT é perpendicular a π, e por isso mesmo, $d(C, \pi) = r$. Cada um desses três fatos,



$$\pi \cap S = \{T\} \qquad (7)$$

$$CT \perp \pi, \; T \in S \qquad (8)$$

$$d(C, \pi) = r \qquad (9)$$

caracteriza a tangência de π e S.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache uma equação geral do plano π, tangente à superfície esférica

   $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$ pelo ponto $T = (1, -1, 1)$.

   Resolução

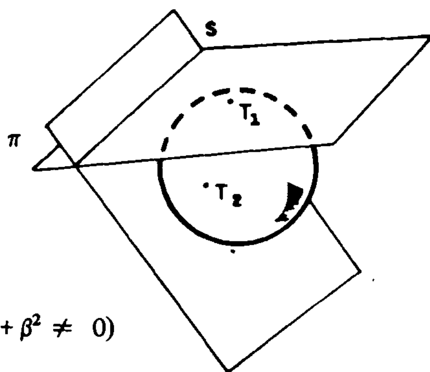
   Observe inicialmente que $T \in S$, sendo portanto o ponto de tangência. Sabemos que $C = (1, 0, 0)$ é o centro de S. Logo, por (8), temos que $\overrightarrow{CT} = (0, -1, 1)$ é um vetor normal a π. Daí, $\pi: -y + z + d = 0$.

   Como $T \in \pi$, temos $-(-1) + 1 + d = 0$ donde $d = -2$. Assim π: $-y + z - 2 = 0$.

2. Escreva uma equação geral do plano π, que contém a reta

$$s: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 6y + 3z - 49 = 0 \end{cases}$$

   e é tangente à superfície esférica S de centro na origem e raio 7.



Resolução

π pertence ao feixe de planos por s, logo

$$\pi : \alpha(x + y + z) + \beta(2x - 6y + 3z - 49) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

ou seja,

$$\pi : (\alpha + 2\beta)x + (\alpha - 6\beta)y + (\alpha + 3\beta)z - 49\beta = 0 \qquad (\gamma)$$

Então, impondo que $d(C, \pi) = r$, onde $C = (0, 0, 0)$ e $r = 7$, obtemos

$$\frac{|-49\beta|}{\sqrt{(\alpha + 2\beta)^2 + (\alpha - 6\beta)^2 + (\alpha + 3\beta)^2}} = 7$$

Quadrando e simplificando, vem $3\alpha^2 - 2\alpha\beta = 0$, donde $\alpha(3\alpha - 2\beta) = 0$, e portanto $\alpha = 0$ ou $\alpha = \dfrac{2}{3}\beta$.

Substituindo em (γ) obtemos duas soluções: :

$$\pi : 2x - 6y + 3z - 49 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi : 8x - 16y + 11z - 147 = 0$$

3. Obtenha equações gerais dos planos tangentes à superfície esférica

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 1 = 0$$

que são paralelos ao plano $\pi_1 : x - y - 2z - 2 = 0$.

Resolução

Chamemos π ao plano procurado. Então,

$$\pi \,//\, \pi_1 \Rightarrow \pi : x - y - 2z + d = 0.$$

Sendo $C = (-1, -1, 0)$ o centro de S e $r = \sqrt{3}$ o seu raio, obtemos de (9):

$$\frac{|-1 + 1 - 2 .\ 0 + d|}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

ou $|d| = \sqrt{18}$, donde $d = \pm\sqrt{18}$.

As respostas são, pois

$$x - y - 2z + \sqrt{18} = 0 \quad \text{e} \quad x - y - 2z - \sqrt{18} = 0.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache uma equação geral do plano tangente a S no ponto T, nos casos:

   a) $T = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ $\qquad$ $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$

   b) $T = (0, \sqrt{95}, 0)$ $\qquad$ $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 95 = 0$

2. Ache os planos tangentes à superfície esférica $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1$ que são paralelos ao plano $2x + y - z = 0$.

3. Ache os planos tangentes à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que contêm a reta $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$

4. Uma corda PQ da superfície esférica $S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 10 = 0$ está contida na reta $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 1 - z \end{cases}$ Determine os planos tangente em P e Q.

5. Prove que se uma superfície esférica de centro $C = (a, b, c)$ é tangente aos três planos coordenados, então $|a| = |b| = |c|$.

6. Mostre que o plano tangente a $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$ tem equação $x_1 x + y_1 y + z_1 z = r^2$.

7. Dê equações gerais dos planos tangentes à superfície esférica $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 6$, perpendiculares à reta $\frac{x-1}{2} = y = z - 1$.

8. Obtenha equações gerais dos planos que contêm a reta t e são tangentes à superfície esférica S nos casos:

a) $t : \frac{x+6}{2} = y + 3 = z + 1$

$S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0$

b) $t : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 3, 1)$

$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$

Interprete os resultados.

9. Ache uma equação da superfície esférica de centro $C = (3, 2, -2)$, tangente ao plano $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

10. Dê uma equação da superfície esférica tangente aos três planos coordenados, situada no 1º octante, com centro no plano $3x + 2y - z - 8 = 0$.

11. Dê uma equação da superfície esférica tangente aos planos

$\pi_1 : x = 2z + 8$ e $\pi_2 : 2x - z + 5 = 0$,

cujo centro pertence à reta $x + 2 = y = 0$.

12. Dê uma equação da superfície esférica inscrita no tetraedro determinado pelos planos:

$\pi_1 : 5x - 2y + 14z + 11 = 0$, $\pi_2 : 11x - 2y + 10z + 14 = 0$

$\pi_3 : x + 2y + 2z + 7 = 0$ $\pi_4 : x - 2y + 2z + 7 = 0$

13. Dê uma equação da superfície esférica circunscrita ao tetraedro do exercício anterior.

14. Dê uma equação da superfície esférica que passa pelo ponto $A = (-1, 6, -3)$ e tangencia o plano $4x + 4y + 7z - 96 = 0$ no ponto $T = (7, 3, 8)$.

15. Dê uma equação da superfície esférica tangente aos planos $x = 0$ e $3x + y + z - 2 = 0$, sendo $T = (0, 2, -1)$ um dos pontos de tangência.

16. Idem, sendo os planos $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ e $6x - 3y - 2z + 63 = 0$ e $T = (5, -1, -1)$.

17. Calcule o raio de uma superfície esférica tangente aos três planos coordenados, que passa pelo ponto $(1, -1, 2)$.

18. Calcule a para que o plano $x + y + z = a$ seja tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, e determine o ponto de tangência.

19. Dê uma condição sobre a, b, c, d para que o plano $ax + by + cz + d = 0$ seja tangente à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

20. Calcule o máximo e o mínimo valores atingidos pela expressão $x - 2y + z$ sobre a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

21. Dê uma equação da superfície esférica de centro $(6, 3, -4)$, tangente ao eixo Ox. (uma reta t, tangente a uma superfície esférica S, satisfaz condições análogas a (7), (8), e (9), com t em lugar de π).

22. Obtenha a equação reduzida da superfície esférica S_1 concêntrica com S e tangente à reta t. Dados:

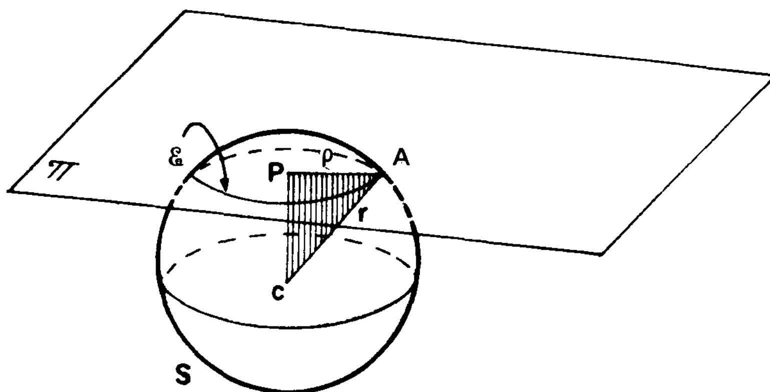
$$t: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 8z + 16 = 0.$$

23. Obtenha a equação geral da superfície esférica com centro na reta PQ, que tangencia os eixos Ox e Oy, sendo que as três coordenadas do centro são negativas. Dados: $P = (1, 3, -1)$ e $Q = (-1, 0, -2)$.

24. Obtenha equações gerais dos planos que passam pelos pontos $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (1, 2, 1)$ e tangenciam a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 8 = 0$.

1.3 Plano secante. Equações de uma circunferência

Seja S uma superfície esférica de centro C e raio r. Um plano π é *secante* a S se e somente se $d(C, \pi) < r$. Nesse caso, a interseção $S \cap \pi$ é uma circunferência $\mathscr{C}$ contida no plano π, que pode ser dada pelo sistema de equações



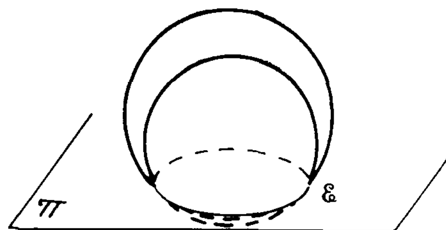
$$\&: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ mx + ny + pz + q = 0 \end{cases}$$

Para se determinar o centro P e o raio ρ da circunferência &, basta observar que P é a projeção ortogonal de C sobre π e que (veja na figura o triângulo retângulo CPA)

$$r^2 = \rho^2 + d(C,\pi)^2 \qquad \text{ou} \qquad r^2 = \rho^2 + d(P,C)^2$$

Observação

Dada uma circunferência &, contida em um plano π, existe uma infinidade de superfícies esféricas que interceptam π em &. A "menor" delas (isto é, a de menor raio) tem o mesmo centro e o mesmo raio que &, sendo & seu equador.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache o centro P e o raio ρ da circunferência

$$\&: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 3x - y = 0 \\ 2x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolução

Achamos inicialmente o centro C e o raio r da superfície esférica

$S: x^2 + y^2 + z^2 + 3x - y = 0$, obtendo $C = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ e $r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Como vimos, P é a projeção ortogonal de C sobre o plano $\pi: 2x - y - 2z - 1 = 0$

- reta por C, perpendicular a π:

$$s: \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases}$$

- interseção de s com π:

$$2(-\frac{3}{2} + 2\lambda) - (\frac{1}{2} - \lambda) - 2(-2\lambda) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

logo, $P = (-\frac{1}{2}, 0, -1)$.

Quanto a ρ: sendo $\rho^2 + d(P, C)^2 = r^2$, temos

$$\rho^2 = \frac{10}{4} - (1 + \frac{1}{4} + 1) = \frac{10}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

2. Obtenha equações da circunferência $\mathscr{E}$, de centro $P = (1, 1, -2)$ e que passa pelos pontos $Q = (2, 3, 0)$ e $R = (-1, -1, -1)$.

Resolução

Devemos obter equações de π e de S. π é certamente o plano que passa por P, Q e R; sendo $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 2)$ e $\overrightarrow{PR} = (-2, -2, 1)$, temos

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donde $\pi : 6x - 5y + 2z + 3 = 0$.

Quanto a S, escolhamos aquela que tem mesmo centro e mesmo raio que $\mathcal{E}$ (veja a observação anterior): $r = d(P, Q) = 3$, $C = P = (1, 1, -2)$. Logo,

$$S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$$

ou seja,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0$$

e finalmente

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0 \\ 6x - 5y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache o centro e o raio da circunferência interseção do plano $2x - 2y - z + 9 = 0$ com a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$

2. Obtenha equações da circunferência que tem diâmetro AB e passa por C, sendo dados $A = (3, -2, 5)$, $B = (-1, 6, -3)$, $C = (1, -4, 1)$.

3. Obtenha equações da circunferência que passa pelos pontos $A = (3, -1, -2)$, $B = (1, 1, -2)$ e $C = (-1, 3, 0)$.

4. O plano $3x + 2y + 6z = 6$ intercepta os eixos coordenados nos pontos A, B, e C. Obtenha equações da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

5. Dados $A = (3, -1, -2)$ e $B = (1, 1, -2)$, obtenha equações do lugar geométrico dos pontos X tais que o triângulo ABX seja equilátero. Interprete geometricamente.

6. Obtenha equações da circunferência de centro $(1, -1, -2)$, que determina sobre a reta

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0 \\ 4x - 7y - z + 6 = 0 \end{cases}$$ uma corda de comprimento 8.

7. Dê equações gerais dos planos paralelos ao plano $x - 2y - z = 0$, que interceptam a superfície esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z = 0$, segundo circunferências de raio $\sqrt{3/2}$

8. Um hexágono regular inscrito na circunferência

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

tem um vértice na reta $X = (-1, 1, 1/3) + \lambda(2, -1, 1)$. Determine seus seis vértices.

9. Verifique se as superfícies esféricas

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 4 = 0$$

são secantes. Em caso afirmativo, ache o centro e o raio da circunferência $S_1 \cap S_2$ (observe que subtraindo as equações de S_1 e S_2 obtém-se uma equação do plano que contém $S_1 \cap S_2$; por quê?).

10. Ache λ real tal que as superfícies esféricas S_1 e S_2 sejam tangentes:

$$S_1 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 1,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 4\lambda z = 0.$$

11. Sejam $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$. Dê as equações reduzidas das superfícies esféricas tangentes a S_1 e a S_2, com centro colinear com os centros de S_1 e S_2.

12. Dê uma equação da superfície esférica tangente ao plano $z = 0$ no ponto $(1, -2, 0)$, que tangencia externamente a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 2z + 1 = 0$.

13. Obtenha as equações gerais das superfícies esféricas com centro $(1, 0, 1)$ que tangenciam interiormente a superfície esférica $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 10 = 0$.

§2 Generalidades sobre curvas e superfícies

Nesta seção vamos falar levemente sobre curvas e superfícies. É importante ressaltar que o enfoque vai ser essencialmente intuitivo e não-rigoroso, uma vez que o habitat natural para esses conceitos é o da *Geometria Diferencial*, cujos recursos não estão à nossa disposição no momento.

A idéia de superfície é a de algo bidimensional que se pode imaginar, por exemplo, tomando um pedaço de uma placa de borracha bem fina, e deformando esse pedaço sem rompê-lo, mantendo a bidimensionalidade. Por exemplo, um plano é uma superfície. Observe uma sua equação:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

Uma superfície esférica é uma superfície; sua equação tem a forma

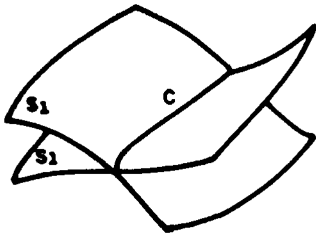
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

As duas equações anteriores são casos particulares de

$$f(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

Vamos definir uma superfície S como sendo um subconjunto de E^3 tal que (fixado um sistema de coordenadas) $P = (x, y, z)$ pertence a ela se e somente se suas coordenadas satisfazem uma equação da forma (10), que será uma equação de S. É claro que a definição é defeituosa, pois vimos que uma equação como (10) pode representar um ponto, ou o vazio

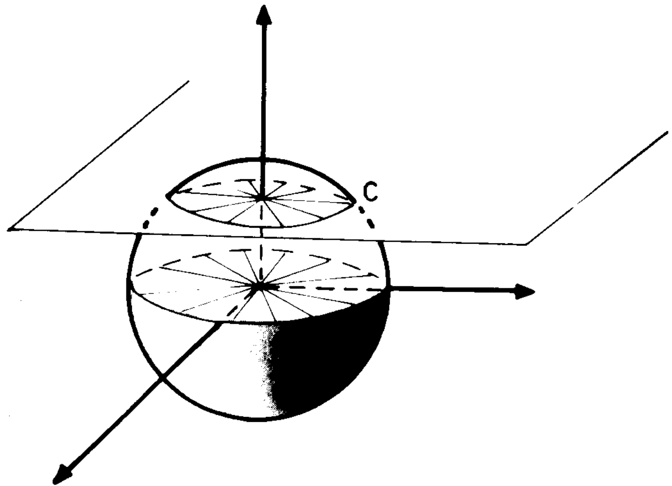
Por outro lado, uma curva é algo unidimensional, como a trajetória de um movimento de um ponto, e pode ser concebida como a interseção de duas superfícies:



$$C: \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

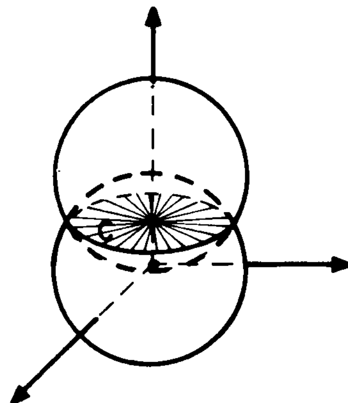
Por exemplo, uma circunferência no espaço pode ser dada como interseção de uma superfície esférica com um plano:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

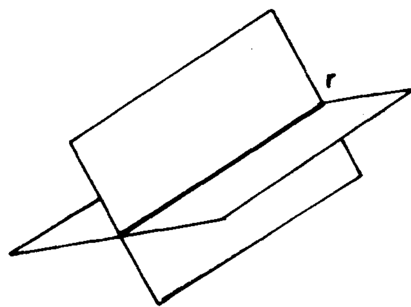


ou de duas superfícies esféricas:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$



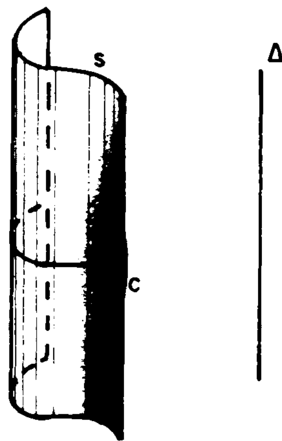
Mesmo uma reta (que é uma curva!), como sabemos, pode ser dada como interseção de dois planos



$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Observação

Existem outras maneiras de representar curvas e superfícies (sob forma paramétrica, por exemplo) as quais não vamos considerar aqui.



§3 Superfície cilíndrica

Um subconjunto S de E^3 se diz uma *superfície cilíndrica* se existir uma curva C e uma reta Δ tais que S é a reunião das retas paralelas a Δ e que passam por algum ponto de C. C é chamada *diretriz* de S e as retas citadas, paralelas a Δ, são chamadas geratrizes de S. Fixado um sistema de coordenadas, vamos supor:

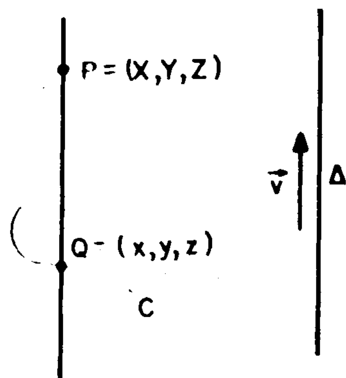
- C dada por $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (12)

- $\vec{v} = (m, n, p) \neq \vec{0}$ um vetor diretor de Δ.

Então, $P \in S$ se e somente existem $Q \in C$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{v}$$

Escrevendo



$$Q = (x, y, z)$$

$$P = (X, Y, Z)$$

a relação anterior fica

$$(x - X,\ y - Y,\ z - Z) = \lambda\,(m, n, p)$$

e daí

$$\begin{cases} x = X + \lambda m \\ y = Y + \lambda n \\ z = Z + \lambda p \end{cases} \qquad (13)$$

Ora, como $Q \in C$ se e somente se x, y, z verificam (12), obtemos, substituindo (13) em (12):

$$\begin{cases} f(X + \lambda m, Y + \lambda n, Z + \lambda p = 0 \\ g(X + \lambda m, Y + \lambda n, Z + \lambda p = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Se pudermos eliminar λ dessas duas equações, chegaremos a uma relação do tipo

$$F(X, Y, Z) = 0 \qquad (15)$$

que, se for equivalente a (14)(*), definirá a superfície cilíndrica como uma superfície, que terá (15) por equação.

(*) Quer dizer, X, Y, Z satisfazem (15) $\Longleftrightarrow$ existem λ, m, n, p tais que (14) se verifica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache uma equação da superfície cilíndrica de diretriz

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

cujas geratrizes são paralelas à reta $\Delta: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Resolução

Temos, usando a notação vista, $\vec{v} = (m, n, p) = (1, 1, 2)$

As relações (13) ficam $\begin{cases} x = X + \lambda \\ y = Y + \lambda \\ z = Z + 2\lambda \end{cases}$

Devemos substituir nas equações de C, as quais são equivalentes a

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

logo,

$$\begin{cases} (X + \lambda)^2 + (Y + \lambda)^2 = 4 \\ Z + 2\lambda = 0 \end{cases}$$

Da 2ª equação vem $\lambda = -\frac{Z}{2}$, que levado na 1ª equação fornece

$$(X - \frac{Z}{2})^2 + (Y - \frac{Z}{2})^2 = 4,$$

que é a equação procurada.

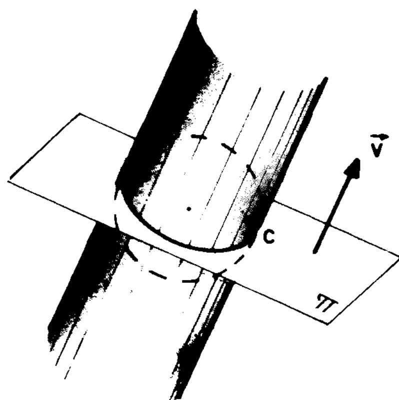
Observação

Sugerimos a você que faça uma figura representando a superfície.

2. Ache uma equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$ e circunscrita à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução

Pode-se obter uma diretriz achando a interseção da superfície esférica com um plano π pelo centro da mesma e perpendicular a $\vec{v}$. Em seguida procede-se como no exercício anterior. Vamos optar, no entanto, por uma segunda resolução. Seja $Q = (x, y, z)$. Escrevamos a equação de uma reta qualquer paralela a $\vec{v}$, passando por $P = (X, Y, Z)$:



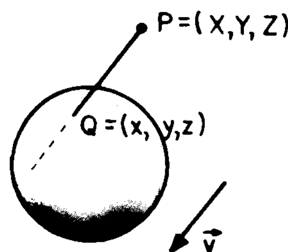
$$\begin{cases} x = X + 2\lambda \\ y = Y - \lambda \\ z = Z + \lambda \end{cases}$$

Vamos agora obrigar Q a pertencer à superfície esférica. Substituindo x, y, z dados acima na equação desta superfície, virá

$$(X + 2\lambda)^2 + (Y - \lambda)^2 + (Z + \lambda)^2 = 1$$

ou seja,

$$6\lambda^2 + 2\lambda(2X - Y + Z) + X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$$



Para cada ponto $P = (X, Y, Z)$ esta equação em λ terá nenhuma, uma única, ou duas raízes reais. Terá uma única se e somente se P está na superfície cilíndrica procurada, logo se e somente se seu discriminante for nulo:

$$[2(2X - Y + Z)]^2 - 4.6.[X^2 + Y^2 + Z^2 - 1] = 0$$

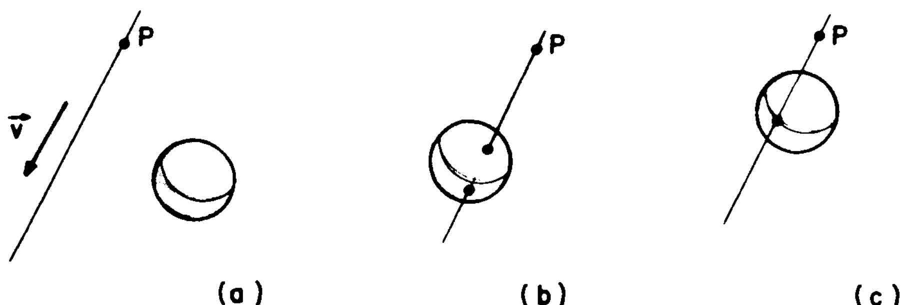
isto é

$$(2X - Y + Z)^2 - 6(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) = 0,$$

que é a equação procurada.

Observação

A figura abaixo ilustra o que foi feito:



No caso (a), não existe λ que "estique" $\vec{v}$ de modo que $P + \lambda\vec{v}$ fure a superfície esférica. No caso (b) existem dois valores. No caso (c) existe um único!

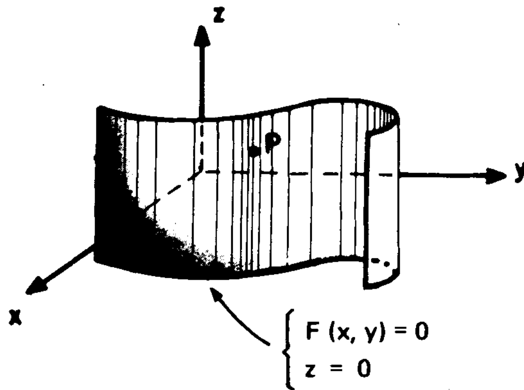
3. Verifique que uma relação do tipo $F(X, Y) = 0$ é equação de uma superfície cilíndrica S de diretriz

$$C: \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

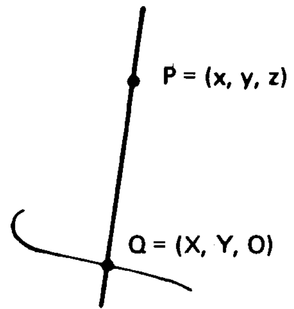
e geratrizes paralelas a Oz. Represente no plano Oxy os pontos (x, y, o) tais que F (x, y) = 0 e trace as retas que passam por eles e são paralelas a Oz. A superfície S é a reunião dessas retas.

Resolução

Se você seguir o método exposto no Exercício 1, com $\vec{v} = (0, 0, 1)$, obterá $F(X. Y) = 0$ para equação da superfície cilíndrica. Faça como exercício. Preferimos aqui argumentar de uma outra maneira, mais intuitiva.



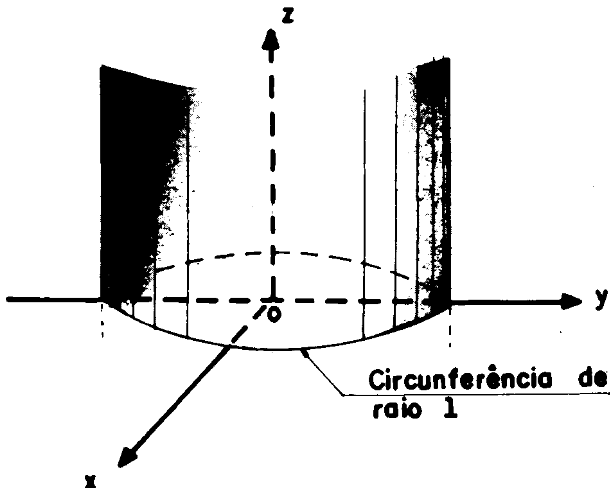
Suponha P = (X, Y, Z) sobre a superfície cilíndrica S tendo C por diretriz e de geratrizes paralelas a Oz. Então, por construção, a projeção Q = (X, Y, 0) de P sobre Oxy na direção de Oz,



cai sobre C, logo satisfaz $\begin{cases} F(X, Y) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$

e daí F(X, Y) = 0. Reciprocamente, se P = (X, Y, Z) é tal que F(X, Y) = 0, isso indica que P se projeta (paralelamente a Oz) no plano Oxy num ponto de C, logo, por construção de S, $P \in S$.

Por exemplo, $X^2 + Y^2 = 1$ é a equação de uma superfície cilíndrica, mostrada na figura abaixo:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache uma equação da superfície cilíndrica de diretriz

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{cujas geratrizes são paralelas à reta} \quad \Delta: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

2. Idem para $C: \begin{cases} x^2 - xy + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad \Delta: \begin{cases} x = 2z \\ y = z + 3 \end{cases}$

3. Idem para $C: \begin{cases} xy = z \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $\qquad \Delta: x = y = z$

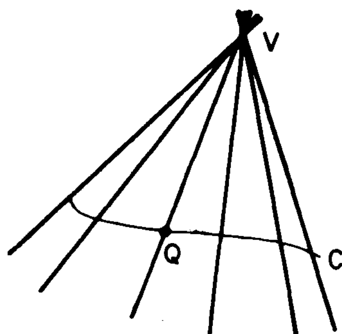
4. Idem para $C: \begin{cases} x + y + xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad \Delta: x = y = z$

5. Idem para $C: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad \Delta: \begin{cases} x = mz \\ y = nz \end{cases}$ $\qquad (m, n \in \mathbb{R})$

6. Ache uma equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas a $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e circunscrita à superfície esférica de centro $(1, -2, 2)$ e raio $\sqrt{3}$.

§4 Superfície cônica

Um subconjunto S de E^3 se diz uma *superfície cônica* se existir uma curva C e um ponto

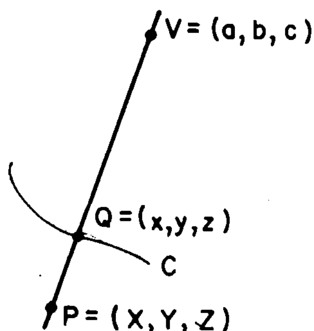


$V \notin C$ tais que S é a reunião das retas VQ, onde Q percorre C. C se chama *diretriz* de S, V *vértice* de S, cada reta VQ uma *geratriz* de S. Fixado um sistema de coordenadas, suponhamos C dada por

- $$C: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

- $$V = (a, b, c) \tag{17}$$

Então $P = (X, Y, Z)$ está em S se e somente se existe $Q = (x, y, z)$ pertencente a C e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que



$$\overrightarrow{VQ} = \lambda \overrightarrow{VP}^{(*)}$$

ou seja

$$Q = V + \lambda \overrightarrow{VP}$$

de onde resulta

$$\begin{cases} x = a + \lambda (X - a) \\ y = b + \lambda (Y - b) \\ z = c + \lambda (Z - c) \end{cases} \tag{18}$$

Como $Q \in C$ se e somente se x, y, z verificam (16), vem, levando (18) a (16):

$$\begin{cases} f(a + \lambda (X - a),\ b + \lambda (Y - b),\ c + \lambda (Z - c)) = 0 \\ g(a + \lambda (X - a),\ b + \lambda (Y - b), c + \lambda (Z - c)) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Se pudermos eliminar λ, obteremos uma relação entre X, Y, Z:

$$F(X, Y, Z) = 0 \tag{20}$$

que, se for equivalente a (19), define S como uma superfície, sendo (20) uma sua equação.

(*) Escrevendo assim, excluímos V, isto é, $P \neq V$. Deveríamos dizer: $P \neq V$ está em S se e somente se etc...

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Ache uma equação da superfície cônica de vértice **V** = (1, -1, 3) que tem por diretriz a circunferência

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolução

As relações (18) ficam

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(X - 1) \\ y = -1 + \lambda(Y + 1) \\ z = 3 + \lambda(Z - 3) \end{cases}$$

Substituindo nas equações que definem C, vem

$$\begin{cases} [1 + \lambda(X - 1)]^2 + [-1 + \lambda(Y + 1)]^2 = 1 \\ 3 + \lambda(Z - 3) = 0 \end{cases}$$

Da 2ª equação resulta

$$\lambda = -\frac{3}{Z - 3} \qquad (Z \neq 3)$$

Levando na 1ª equação:

$$[1 - \frac{3}{Z - 3}(X - 1)]^2 + [-1 - \frac{3}{Z - 3}(Y + 1)]^2 = 1$$

ou seja,

$$(Z - 3X)^2 + (Z + 3Y)^2 - (Z - 3)^2 = 0$$

Observação

Esta equação foi achada excluindo-se o vértice $(Z \neq 3)$, mas é fácil ver que $V = (1, -1, 3)$ a satisfaz.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache uma equação da superfície cônica de vértice (0, 0, 0) cuja diretriz é a parábola

$$p: \begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

2. Idem para $V = (0, 0, 1)$, a diretriz sendo a circunferência

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Idem para $V = (0, 0, 0)$, a diretriz sendo a hipérbole

$$h: \begin{cases} xz = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

4. Ache uma equação da superfície cônica tendo a origem como vértice, e circunscrita à superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y + 2 = 0$$

Sugestão Use o truque de $\Delta = 0$, utilizado no Exercício Resolvido 2 do §3.

5. Ache uma equação da superfície cônica circular reta de vértice $V = (1, 1, 1)$, sabendo que as geratrizes formam ângulo medindo 60° com o eixo, que é a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

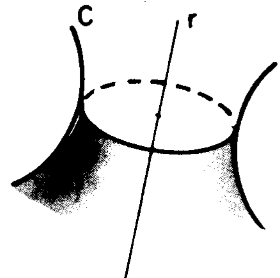
Sugestão Uma resolução elegante é escrever

$$P \in S \iff |\overrightarrow{VP} \cdot \vec{v}| = \|\overrightarrow{VP}\| \, \|\vec{v}\| \cos 60°$$

onde $\vec{v} \neq \vec{0}$ é um vetor diretor de r. Procure resolver também "pelas vias normais".

§5 Superfície de rotação

Um subconjunto S de E^3 é uma superfície de rotação se existem uma reta r e uma curva C tais que S é a reunião das circunferências centradas em r, cujos planos são normais a r, e que passam por algum ponto de C. Em outras palavras, S é obtida pela rotação de C em torno de r.



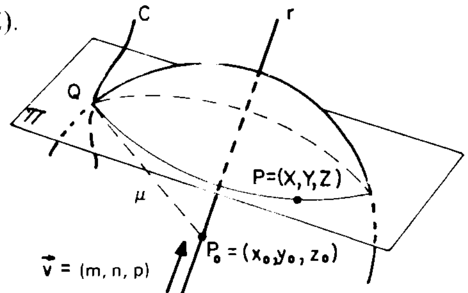
- r se diz *eixo de rotação* de S.
- Cada uma das circunferências acima referidas se diz um *paralelo* de S.
- A interseção de S com um semiplano de origem r se diz um *meridiano* de S.

Fixado um sistema ortogonal de coordenadas, suponhamos C dada por

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Sejam $\vec{v} = (m, n, p) \neq \vec{0}$ um vetor diretor de r, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de r, e $P = (X, Y, Z)$.

Então $P \in S$ se e somente se



- existe um paralelo
- que intercepta C, digamos em $Q = (x, y, z)$
- que passa por $P = (X, Y, Z)$.

Ora, um paralelo pode ser dado como interseção de um plano $\pi \perp r$ com uma superfície esférica de centro em P_0 (veja a figura). Então, $P = (X, Y, Z) \in S$ se e somente se existem $\lambda, \mu, x, y, z \in \mathbf{R}$, $\mu > 0$, tais que:

$$\begin{cases} mx + ny + pz = \lambda \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \mu^2 \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} mX + nY + pZ = \lambda \\ (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = \mu^2 \end{cases} \tag{23}$$

Vamos supor que de (21) e (22) se possam eliminar x, y, z, obtendo-se uma equação equivalente

$$\phi(\lambda, \mu) = 0 \tag{24}$$

De (23) e (24) resulta

$$\phi\left(mX + nY + pZ, \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2}\right) = 0 \tag{25}$$

Então

$$P = (X, Y, Z) \text{ pertence a } S \iff (25) \text{ se verifica.}$$

Logo (25) é uma equação de S.

Observação

Se λ e $\mu > 0$ forem quaisquer, (21) nos dará todas as circunferências do espaço centradas em r e jazendo em planos ortogonais a r. A relação (24) restringe λ e μ de modo a que tenhamos somente aquelas que passam por algum ponto de C.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache uma equação da superfície de rotação gerada pela curva

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

em torno da reta

$$r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Resolução

Escolhamos $P_0 = (0, 0, 0)$ de r, e $\vec{v} = (1, 1, 1)$, vetor diretor de r. Então (21) e (22) ficam

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda & (\alpha) \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 & (\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (\gamma) \\ x + z = 0 & (\delta) \end{cases}$$

O sistema é equivalente a (relacionando (β) com (γ) e (α) com (δ)):

$$\begin{cases} y = \lambda & (\alpha') \\ z^2 = \mu^2 - 1 & (\beta') \\ x^2 + y^2 = 1 & (\gamma') \\ x + z = 0 & (\delta') \end{cases}$$

Relacionando (α') com (γ') vemos que este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} y = \lambda \\ \left.\begin{aligned} z^2 &= \mu^2 - 1 \\ z^2 + \lambda^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \underbrace{\mu^2 + \lambda^2 - 2}_{\phi(\lambda,\,\mu)} = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

A equação procurada será obtida substituindo nessa relação λ e μ dados por

$$\begin{cases} X + Y + Z = \lambda \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \mu^2 \end{cases}$$

Resulta

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (X + Y + Z)^2 - 2 = 0$$



Ache uma equação da superfície gerada pela rotação da curva

$$C: \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{em torno do eixo } Oz.$$

Resolução

Tomemos $P_0 = (0, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Então (21) e (22) ficam

$$\begin{cases} z = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 \\ f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

de onde resulta $f(\pm\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}, \lambda) = 0$. A equação (23) se escreve

$$\begin{cases} Z = \lambda \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \mu^2 \end{cases}$$

logo, substituindo na relação anterior, vem que

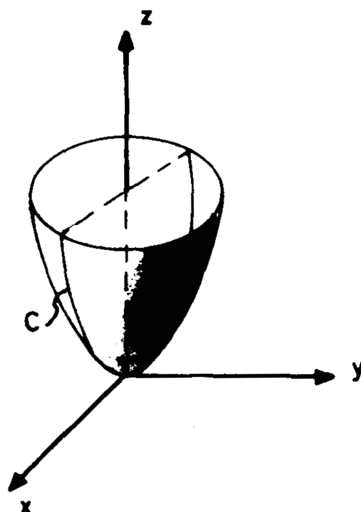
$$f(\pm\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) = 0$$

Observação

Temos assim a seguinte regra:

sendo C dada por $\begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ para obter uma equação da superfície gerada pela rotação de C em torno de Oz, substitua x por $\pm\sqrt{X^2 + Y^2}$ e z por Z em $f(x, z) = 0$. Por exemplo, se

$$C: \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$



então uma equação será

$$Z = (\pm\sqrt{X^2 + Y^2})^2$$

ou seja,

$$Z = X^2 + Y^2$$

Enuncie o resultado análogo para rotação, em torno dos eixos Ox e Oy, de curvas contidas nos outros dois planos coordenados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache uma equação da superfície de rotação gerada pela rotação da curva C em torno da reta r, sendo

$$C: \begin{cases} x - 1 = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad r : x = y = z$$

2. Idem, C sendo a reta $x - y = z = 0$.

3. Ache uma equação da superfície de rotação gerada pela rotação, em torno do eixo Oz, da curva C, sendo esta dada por

$$\text{a)} \begin{cases} 3z^2 + 3x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} (x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Idem, girando em torno do eixo Ox.

5. Obtenha uma equação da superfície gerada pela parábola

$$C: \begin{cases} z = y^2 - 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{quando gira em torno de Oy.}$$

6. Idem para

$$C: \begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{em torno de Oy e Oz.}$$

7. Obtenha uma equação da superfície gerada pela rotação, em torno de Oz, da curva

$$C: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^2 \\ z = \alpha^2 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

8. Obtenha uma equação da superfície definida como reunião das retas que se apoiam no eixo Ox e na circunferência

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

mantendo-se paralelas ao plano Oyz (esta não é uma superfície cilíndrica, nem cônica, e tampouco de rotação; no entanto você pode adaptar as técnicas que aprendeu nesses casos para resolver o exercício).

§6 Quádricas (forma reduzida)

Chama-se *quádrica* ao conjunto dos pontos $P = (x, y, z) \in E^3$ tais que

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$ onde a, b, ..., j, são números reais, a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos.

Não faremos o estudo das quádricas em geral, limitando-nos a casos especiais da equação acima.

(A) Elipsóide

Um subconjunto S de E^3 é um *elipsóide* se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, c, positivos, tais que

$$S = \{ P = (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$$

É pois uma superfície, tendo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (26)$$

por equação.

Valem as propriedades:

1. S é um conjunto simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados, e à origem (do sistema referido). Basta observar que o 1º membro de (26) não se altera se substituirmos x por $-x$, y por $-y$, ou z por $-z$.

2. A interseção de S com um plano $z = k$ é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

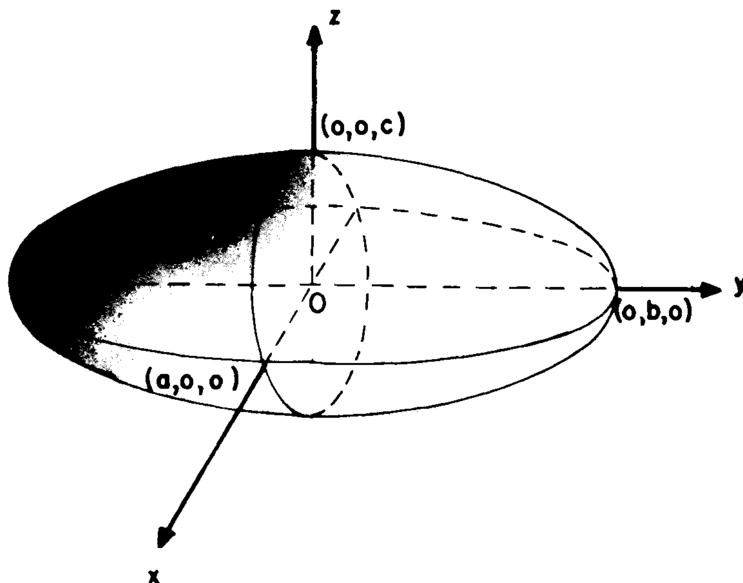
logo é não vazia se e somente se $1 - \dfrac{k^2}{c^2} \geqslant 0$, isto é, $-c \leqslant k \leqslant c$. Se $k = \pm c$, a interseção se reduz a um ponto, que é $(0, 0, c)$ se $k = c$ e $(0, 0, -c)$ se $k = -c$. Se $-c < k < c$, a interseção é a elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

cujos semi-eixos decrescem se $|k|$ cresce. Em particular, se $z = 0$ (plano Oxy) a elipse é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Fazendo interseções com os planos $y = 0$, e $x = 0$, chega-se a conclusões semelhantes. Estas considerações nos permitem esboçar um desenho de S.



(B) **Hiperbolóide de uma folha**

Um subconjunto S de E^3 é um *hiperbolóide de uma folha* se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, c, positivos, tais que

$$S = \{ P = (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \}.$$

É pois uma superfície, de equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (27)$$

Valem as propriedades

1. S é um conjunto simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados, e à origem. Basta observar que o 1º membro de (27) não se altera se substituirmos x por $-x$, y por $-y$ ou z por $-z$.

2. A interseção de S com um plano $z = k$ é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

Logo, é uma elipse no plano $z = k$,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

cujos semi-eixos crescem se $|k|$ cresce. Em particular, se $z = 0$ (plano Oxy), a elipse é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. A interseção de S com um plano $y = k$ é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

Então,

- se $\left|\dfrac{k}{b}\right| < 1$, isto é, $-b < k < b$, a interseção é uma hipérbole contida no plano $y = k$, com segmento focal paralelo a Ox.
- se $\left|\dfrac{k}{b}\right| > 1$, isto é, $k > b$ ou $k < -b$, a interseção é uma hipérbole contida no plano $y = k$, com segmento focal paralelo a Oz.
- se $\left|\dfrac{k}{b}\right| = 1$, isto é, se $k = \pm b$, a interseção é um par de retas concorrentes, cujas equações são

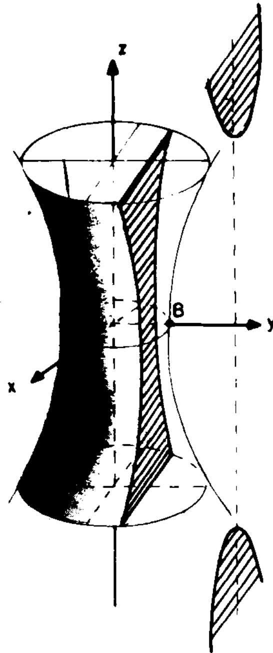
$$\begin{cases} cx - az = 0 \\ y = b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} cx + az = 0 \\ y = b \end{cases} \quad \text{quando } k = b, \text{ e}$$

$$\begin{cases} cx - az = 0 \\ y = -b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} cx + az = 0 \\ y = -b \end{cases} \quad \text{quando } k = -b.$$

Em particular, se $y = 0$ (plano Oxz) tem-se a hipérbole

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Considerações semelhantes são obtidas cortando-se S com planos de equações da forma $x = k$. Estas considerações nos permitem esboçar um desenho de S:



Observação

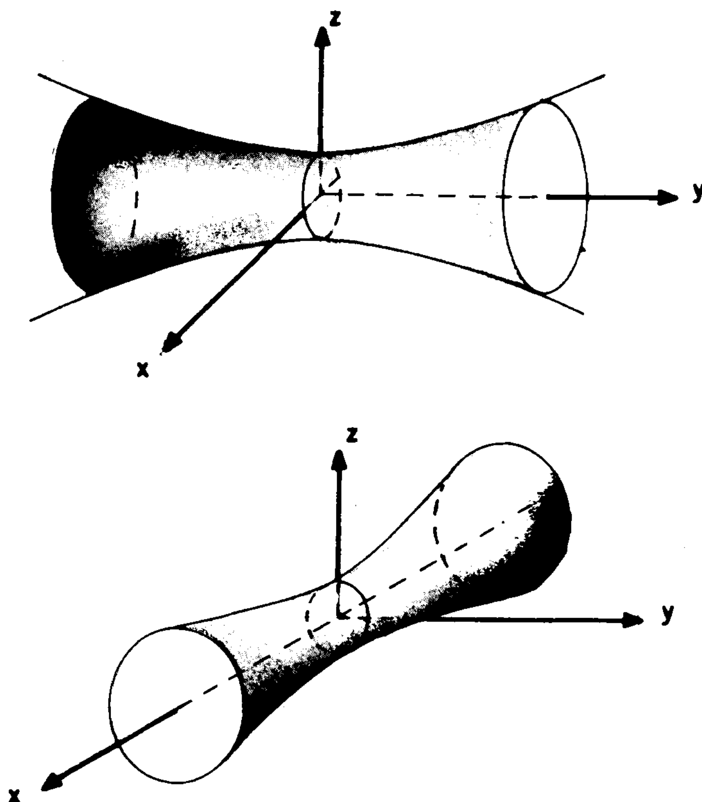
As equações

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (27a)$$

e

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (27b)$$

representam também hiperbolóides de uma folha. Para ver isso, basta fazer (por exemplo) a rotação $x = X$, $y = Z$, $z = -Y$ no caso da equação (27a) e a rotação $x = Z$, $y = Y$, $z = -X$ no caso da equação (27b). As figuras seguintes esclarecem bem:



(C) Hiperbolóide de duas folhas

Um subconjunto S de E^3 é um *hiperbolóide de duas folhas* se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, c, positivos tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

É pois uma superfície, tendo por equação

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (28)$$

Valem as propriedades:

1. S é um conjunto simétrico em relação aos planos coordenados, eixos coordenados, e em relação à origem (por quê?)

2. A interseção de S com um plano z = k é dada por

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \\ z = k \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ \\ z = k \end{cases}$$

logo é uma hipérbole no plano z = k, com segmento focal paralelo a Oy.

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2(1 + \dfrac{k^2}{c^2})} + \dfrac{y^2}{b^2(1 + \dfrac{k^2}{c^2})} = 1 \\ \\ z = k \end{cases}$$

Considerações análogas se podem fazer considerando planos dados por x = k.

3. A interseção de S com um plano y = k é dada por

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \\ y = k \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{b^2} - 1 \\ \\ y = k \end{cases}$$

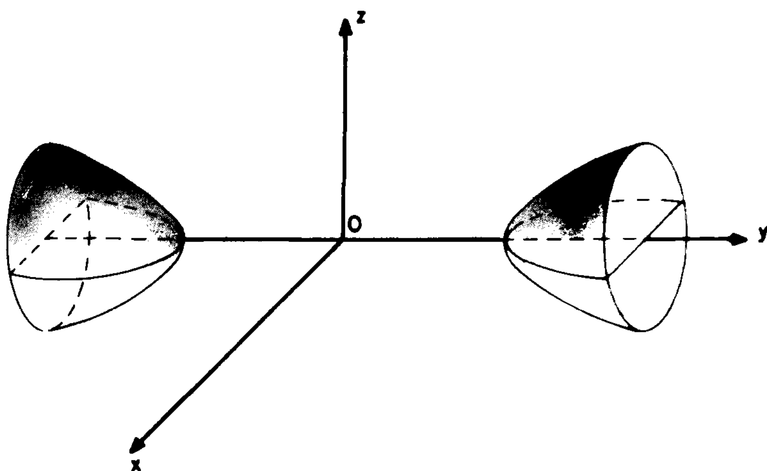
e é não vazia se e somente se $|\frac{k}{b}| \geqslant 1$, isto é, se e somente se $k \geqslant b$ ou $k \leqslant -b$. Então

- se $k = \pm b$, a interseção se reduz ao ponto $(0, k, 0)$;
- se $k > b$ ou $k < -b$, a interseção é a elipse de equações

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 1\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 1\right)} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

cujos semi-eixos crescem quando $|k|$ cresce.

As considerações feitas nos permitem esboçar um desenho de S.



Observação

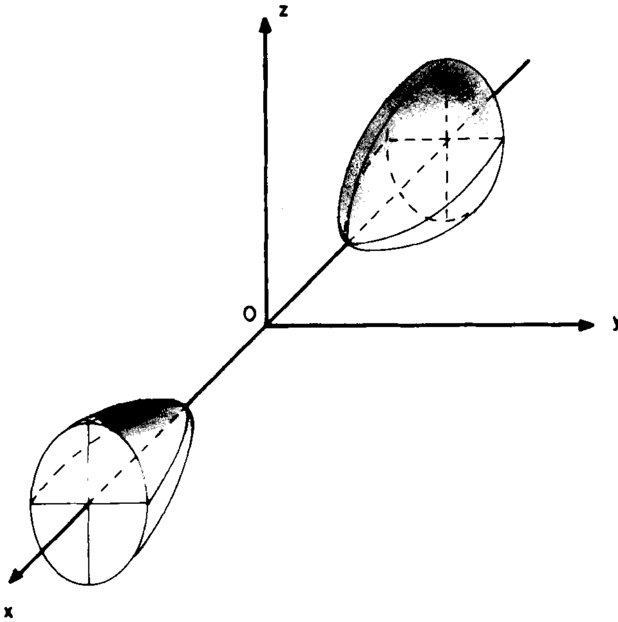
As equações

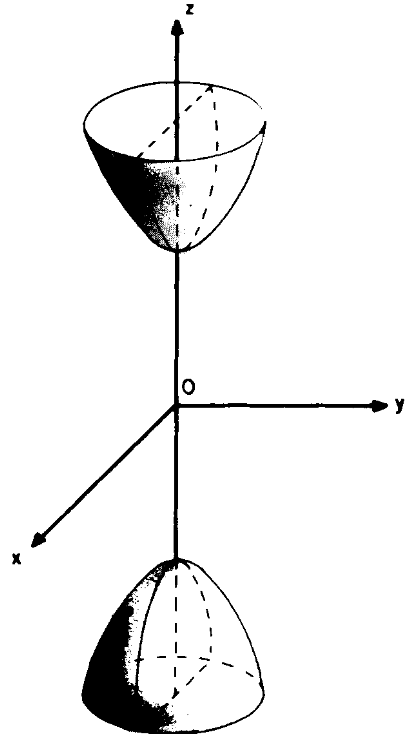
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (28a)$$

e

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (28b)$$

também representam hiperbolóides de duas folhas. Para ver isso, basta fazer, no caso de (28a), a rotação x = Y, y = Z, z = X (por exemplo), e no caso de (28b), a rotação x = Z, y = X, z = Y (por exemplo). Veja as figuras seguintes.





(D) **Parabolóide elíptico**

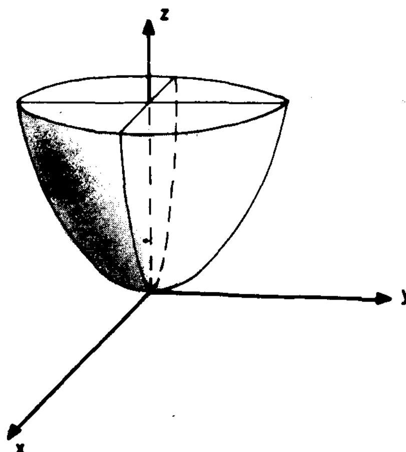
Um subconjunto S de E^3 é um *parabolóide elíptico* se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, positivos, tais que

$$S = \{ P = (x, y, z) \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \}$$

É uma superfície de equação

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \qquad (29)$$

Deixamos para você verificar que S é simétrico em relação aos planos Oxz e Oyz, e que as interseções de S com planos z = k são ou vazias ou constituídas de apenas um ponto, ou elipses. E com os planos x = k e y = k são parábolas.



Verifique também que as equações

$$\boxed{x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad (29a) \qquad \text{e} \qquad \boxed{y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad (29b)$$

representam parabolóides elípticos e esboçe seus desenhos.

(E) **Parabolóide hiperbólico**

Um subconjunto S de E^3 é um *parabolóide hiperbólico* se existe um sistema ortogonal de coordenadas e números a, b, positivos, tais que

$$S = \{P = (x, y, z) \mid z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$$

É uma superfície de equação

$$\boxed{z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \qquad (30)$$

Valem as propriedades:

1. S é simétrico em relação aos planos Oxz e Oyz (por quê?)

2. A interseção de S com um plano z = k é

$$\begin{cases} k = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = k \end{cases}$$

Então,

- se k = 0, a interseção é um par de retas concorrentes na origem, de equações

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} bx + ay = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- se $k > 0$, a interseção é uma hipérbole contida no plano z = k, com segmento focal paralelo a Oy.

- se $k < 0$, a interseção é uma hipérbole contida no plano z = k, com segmento focal paralelo a Ox.

3. A interseção de S com um plano y = k é dada por

$$\begin{cases} z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

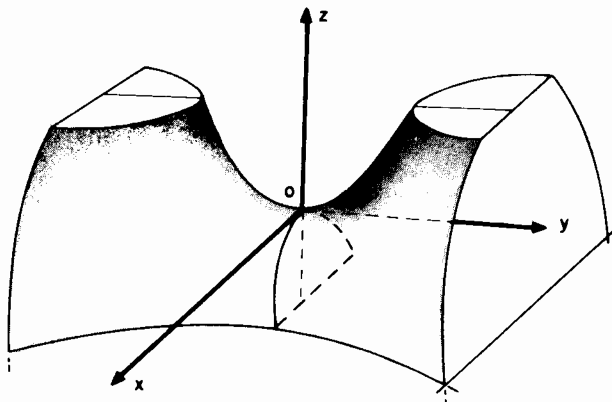
que é uma parábola com concavidade "para baixo".

Em particular, se k = 0, (plano Oxz) temos

$$\begin{cases} z = -\dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

A interseção de S com um plano $x = k$ fornece parábolas de concavidade "para cima". Verifique isso.

Eis um esboço:



Por isso S também é chamada *sela* (de cavalo).

Observação

As equações

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

$$y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

também representam selas. Verifique isso fazendo rotações convenientes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que se dois dos números a, b, c são iguais, o elipsóide (26) é uma superfície de rotação. Especifique o eixo de rotação em cada caso.

2. Mostre que se $a = b$, o hiperbolóide de uma folha (27) é uma superfície de rotação. Qual é o eixo de rotação?

3. Idem, para o hiperbolóide de duas folhas (28b).

4. Idem, para o parabolóide elíptico (29).

5. A equação (30) de um parabolóide hiperbólico S pode ser escrita na forma

$$z = \left(-\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

a) Mostre que dado $c \neq 0$, a reta

$$r_c : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = c \\ \\ -\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

está contida em S. Também, dado $d \neq 0$, a reta

$$r_d : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{d} \\ \\ -\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = d \end{cases}$$

está contida em S.

b) Prove que por cada ponto P de S de cota $z \neq 0$ passa uma única reta da forma r_c, e uma única reta da forma r_d. (No caso $z = 0$, já vimos o que acontece; veja a Propriedade 2 para $k = 0$.)

Observação

Veja que a sela, isto é, o parabolóide hiperbólico, apesar de "torto", é formado por retas. Uma superfície assim é chamada *regrada*.

6. Mostre que o hiperbolóide de uma folha (27) também é uma superfície regrada, colocando a equação na forma

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = \left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

7. Mostre que a superfície de equação $z = xy$ é um parabolóide hiperbólico, efetuando uma mudança de coordenadas de $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ para $(O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, sendo $O' = O$, $\vec{f}_1 = \dfrac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{2}}$, $\vec{f}_2 = \dfrac{\vec{e}_2 - \vec{e}_1}{\sqrt{2}}$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$. Faça uma figura.

8. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Reconheça esse lugar geométrico.

9. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam das retas r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0)$ e s: $X = (0, 1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$. Descreva o lugar geométrico.

10. Usando os métodos deste parágrafo, descreva a superfície de equação $(z-2)^2 = x^2 + y^2$. Faça um esboço.

Atenção Esta quádrica não é elipsóide nem parabolóide nem hiperbolóide.

11. Obtenha equações das superfícies esféricas de raio $\sqrt{41}$, tangentes ao parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ no ponto $T = (1, 1, 4)$.

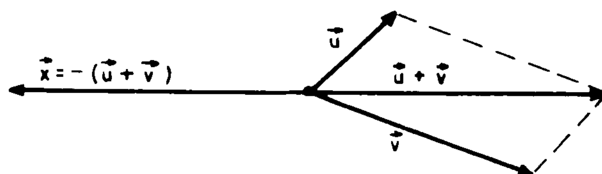
Atenção Para resolver este exercício você vai precisar do conceito de gradiente, dado no curso de Cálculo Diferencial.

PARTE 1

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CAPÍTULO 2 ADIÇÃO DE VETORES (pág. 10)

2.



4. a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG}$

e) $\overrightarrow{AF}$ f) $\overrightarrow{BF}$ g) $\overrightarrow{AD}$ h) $\overrightarrow{AD}$

CAPÍTULO 3 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO REAL POR VETOR (pág. 15)

6. $\vec{x} = -\frac{3}{5}\vec{u} - \frac{5}{4}\vec{v}$

\- $\vec{x} = \frac{5}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v}$,

$\vec{y} = \frac{1}{7}\vec{u} - \frac{1}{7}\vec{v}$

CAPÍTULO 4 SOMA DE PONTO COM VETOR (pág. 22)

1. $\overrightarrow{CX} = \frac{m}{1+m}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{1+m}\overrightarrow{CA}$

2. Para $\overrightarrow{CX}$, ver a resposta do Exercício 1.

$\overrightarrow{AY} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BZ} = \frac{p}{1+p}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

4. c) $\overrightarrow{CX} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b}$ $\qquad X = C + \overrightarrow{CX}$

$\overrightarrow{CY} = \frac{a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB}}{a-b}$ $\quad (a \neq b)$ $\qquad Y = C + \overrightarrow{CY}$

onde $a = \|\overrightarrow{CB}\|$ e $b = \|\overrightarrow{CA}\|$

5. $\overrightarrow{CX} = \frac{(\text{tg}\,\hat{A})\overrightarrow{CA} + (\text{tg}\,\hat{B})\overrightarrow{CB}}{\text{tg}\,\hat{A} + \text{tg}\,\hat{B}}$ (se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são retos); se $\hat{A}$ é reto, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA}$; se $\hat{B}$ é reto, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}$

13. $\overrightarrow{OX} = (1 - m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{OA} + (1 - m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$

14. $\vec{OX} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

15. $\vec{x} = 4\,\vec{MN}$

17. $G = O + \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

21. $X = A + \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{1}{10}\vec{AC}$

22. $\alpha = -1$

CAPÍTULO 6 BASE (pág. 45)

1. a) (3, 0, 6) b) (–3, –3, –3) c) (8, 4, –3)

2. Não.

3. $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$

4. Não.

5. $\vec{u}$ não é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ qualquer que seja m real. Para m = 0 e para m = 3 temos $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LD.

6. a) L I b) L I c) L I d) L D
   e) L I f) L D g) L D h) L I

7. Não.

8. a) ± 1 b) 0; 1 c) Não existe d) 0; 2

10. b) $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

11. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) 5 d) $\sqrt{21}$

CAPÍTULO - MUDANÇA DE BASE (pág. 47)

1. a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\vec{v} = 12\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$; $\vec{v} = -5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$

3. $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \frac{1}{14}\vec{f}_3$

4. De F para E: $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$ De E para F: $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

De E para G: $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ De G para E: $N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

De F para G:
$P = MN = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ De G para F:
$P^{-1} = N^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 8 ÂNGULO ENTRE VETORES. PRODUTO ESCALAR (pág. 57)

1. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\arccos\frac{1}{3}$ d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{3\pi}{4}$

2. a) -9 b) -2 c) $\pm\sqrt{6}$ d) não existe

4. $(3, -3, -3)$ ou $(-3, 3, 3)$; ângulo agudo: $(3, -3, -3)$.

5. $(1, -1, -1)$

6. $(1, 0, 2)$ ou $(-1, 0, -2)$

7. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ou $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$

8. $-1/2$

9. 52

10. $-3/2$

11. $-13/4$

12. $\arccos\frac{4}{\sqrt{26}}$.

13. e) $\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}$; $-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

14. a) $\frac{6}{11}(3, -1, 1)$ b) $\frac{5}{9}(-2, 1, 2)$ c) $(0, 0, 0)$

15. $\vec{w}_1 = (0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10})$, $\vec{w}_2 = (-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10})$

16. $\vec{w}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2)$, $\vec{w}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, 1)$

27. $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ $\quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ $\quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$

30. $\vec{x} = \dfrac{m\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

$$\vec{y} = \vec{u} - \left[\frac{m\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right]$$

($\vec{a}$ e $\vec{b}$ ortogonais a $\vec{v}$)

32. c), d), e)

33.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

35. b) $\vec{u} = (0, -1, 1)_E$, $\vec{v} = (0, 1, 1)_E$, $\vec{w} = (-1, 0, 0)_E$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{2} = \|\vec{v}\|$

d) $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\overrightarrow{HB} = (-1, 1, 1)_E = (0, \sqrt{2}, 1)_F$

36. $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}})_F$

CAPÍTULO 9 ORIENTAÇÃO DE V^3 (pág. 83)

1. Mesma orientação: a) e b). Orientação oposta: c).

2. Mesma orientação: a) e b). Orientação oposta: c).

6. a) $F \in \boldsymbol{A}$ b) $F \in \boldsymbol{B}$

7. $\alpha\beta\gamma > 0$

CAPÍTULO 10 PRODUTO VETORIAL (pág. 96)

1. a) $(-10, 2, -14)$ e $(10, 2, 14)$

   b) $(10, 2, 14)$ e $(-10, -2, -14)$

   c) $(-13, -3, 4)$ e $(13, 3, -4)$

   d) $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0)$

2. $(1, -5, 4)$

3. $\frac{[illegible]}{2}, \frac{[illegible]}{3}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\sqrt{62}$

6. $\frac{\sqrt{19}}{2}$

7. $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$

8. $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$,

$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$,

$\vec{c} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$

9. $\vec{x} = (1, 1, 1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

10. $\vec{x} = (-1, 2, 1)$

11. $\vec{x} = (-1, 1, -1)$

22. $\frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

23. $d = |\overrightarrow{AD} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC}}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC}\|}|$

CAPÍTULO 11 DUPLO PRODUTO VETORIAL (pág. 99)

1. $(1, -2, 1)$ e $(-\frac{10}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{19}{7})$

8. $\vec{x} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} + \dfrac{m\|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}}{(\vec{u} \cdot \vec{w})\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$

9. $\vec{x} = (1, 1, 1)$

10. $\vec{x} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$

11. $\vec{x} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} + \dfrac{m}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$

12. $\vec{x} = -\dfrac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + \lambda\vec{v}$

$\vec{y} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} + (1 - \lambda)\vec{v}$

13. $\vec{x} = \dfrac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (n\vec{u} - m\vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2} + \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

14. É a resposta do exercício 13, com $\lambda = \dfrac{p - \vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}}$ e

$\vec{t} = \dfrac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (n\vec{u} - m\vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2}$

CAPÍTULO 12 PRODUTO MISTO (pág. 106)

1. -1

2. 2

5. 2/3

6. -6

7. 2

12. É a fórmula do exercício 11.

13. b) $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

15. $2\sqrt{\sqrt{6} - 2}$

PARTE 2

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CAPÍTULO 13 SISTEMA DE COORDENADAS (pág. 119)

1. a) Lados: PQ, QS, SR, PR; diagonais: PS, QR.
   b) Sim: as diagonais são AB e CD.

2. $P = (a, b, c) \in Ox \Leftrightarrow$ b [illegible] $(\therefore P = (a, 0, 0))$
   $P = (a, b, c) \in Oy \Leftrightarrow a = c = 0 \quad (\therefore P = (0, b, 0))$
   $P = (a, b, c) \in Oz \Leftrightarrow a = b = 0 \quad (\therefore P = (0, 0, c))$
   $P = (a, b, c) \in Oxy \Leftrightarrow c = 0 \quad (\therefore P = (a, b, 0))$
   $P = (a, b, c) \in Oxz \Leftrightarrow b = 0 \quad (\therefore P = (a, 0, c))$
   $P = (a, b, c) \in Oyz \Leftrightarrow a = 0 \quad (\therefore P = (0, b, c))$

3. $P_1 = (a, b, 0)$, $P_2 = (a, 0, c)$, $P_3 = (0, b, c)$, $P_4 = (a, 0, 0)$, $P_5 = (0, b, 0)$; $P_6 = (0, 0, c)$.

4. a) $A = (0, 0, 0)$ $B = (1, 0, 0)$ $C = (0, 1, 0)$ $D = (-1, 1, 0)$ $E = (-1, 0, 1)$
   $F = (0, 0, 1)$ $G = (-1, 1, 1)$ $H = (-2, 1, 1)$

b) A = (2, −1, −1) B = (3, −1, −1) C = (2, 0, −1) D = (1, 0, −1)
E = (1, −1, 0) F = (2, −1, 0) G = (1, 0, 0) H = (0, 0, 0)

Observe que para obter as respostas do item b), basta somar a cada ponto do item a) o vetor (2, −1, −1); por quê?

c) A = (1, 2, −1/2) B = (1, 4, −1/2) C = (1, 2, 0) D = (1, 0, 0)
E = (0, 0, −1/2) F = (0, 2, −1/2) G = (0, 0, 0) H = (0, −2, 0)

d) A = (0, 0, 0) B = (0, 0, 1) C = (1, 0, 0) D = (1, 0, −1)
E = (0, 1, −1) F = (0, 1, 0) G = (1, 1, −1) H = (1, 1, −2)

CAPÍTULO 14 ESTUDO DA RETA (pág. 136)

1 a) $X = (4, -7, -6) + \lambda(1, -1, -1);\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -7 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}); \\ z = -6 + \lambda \end{cases} \qquad \frac{x-4}{-1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+6}{1}$$

D não pertence à reta.

b) basta verificar que A não pertence à reta que passa por B e C, ou verificar que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é LI.

c) $$\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 4 - 11\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -2 - 4\lambda \end{cases}$$

2. **interna** $$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 \end{cases}$$

externa: $$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 \end{cases}$$

3. $Ox: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

4. $P = (3/4,\ 7/4,\ 15/4)$ ou $P = (3/2,\ 5/2,\ 15/2)$

5. a) $\begin{cases} x = 2 - 15\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -3 + 18\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; b) $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

c) $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

6. a) $\dfrac{x-2}{-15} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{18}$ b) $x - 2 = y = \dfrac{z+3}{-1}$ c) $\dfrac{x-2}{-2} = y = \dfrac{z+3}{-1}$

7. a) $r = s$ b) $r \neq s$ c) $r = s$

8. $(1, 1, 0)$; $d(A, r) = \sqrt{3}$ porque um só ponto de r dista $\sqrt{3}$ de A.

9. $(2, 0, 4)$ e $(0, 2, 4)$; $d(A, r) < \sqrt{11}$, pois existem dois pontos de r que distam $\sqrt{11}$ de A.

10. $(1, 0, 0)$

11. $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

12. Trajetórias concorrentes. Não há colisão. Releia a Observação 6.

13. a) não existe C b) não existe C
c) não existe C d) $(2, -1, 1)$ ou $(4, -3, 1)$

CAPÍTULO 15 ESTUDO DO PLANO

§1 Equação Vetorial e Equações Paramétricas de um Plano (pág. 139)

1. Equações vetoriais:

a) $X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(2, 1, 0)$
b) $X = (1, 0, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(1, 1, 1)$
c) $X = (1, -1, 0) + \lambda(-1, -2, 1) + \mu(0, 1, 1)$
d) os três pontos são colineares; não está determinado o plano π.

2. a) sim b) sim c) não d) sim

3. $\vec{v} = (11, 7, 4) + (-10, -5, 0)$

4. $X = (4, 5, 2) + \lambda(2, 3, 1)$

5. Oxy: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ Oxz: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Oyz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

6. $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$
$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(0, 0, 1)$
$X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 0, 0)$
$X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(1, 0, 0)$
$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 0)$
$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 0)$

7. $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

CAPÍTULO 15 ESTUDO DO PLANO

§2. **Equação Geral** (pág. 146)

2. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2 + \mu \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$

3. Oxy: $z = 0$ Oyz: $x = 0$ Oxz: $y = 0$
bissetores: $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x - z = 0$, $x + z = 0$, $y - z = 0$, $y + z = 0$

4. a) não b) sim

5. a) $x - 2y + 4z + 1 = 0$ b) $3x - y - 2z - 1 = 0$
c) $3x - y + z - 4 = 0$ d) os pontos são colineares

6. $x - y - 1 = 0$

7. $8x - 4y - z + 4 = 0$

8. $2x - y - 3z + 7 = 0$

9. $y - 2 = 0$

10. a) $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$, $\pi_2 : x - y - z = 0$, $\pi_3 : x + 2y - z - 2 = 0$ b) $(1/2, 2/3, -1/6)$

11. a) sim b) não c) não

12. $-5x - 3y + z + 39 = 0$

13. a) $P = (-2, 2, -7)$, $\pi: -17x + 7y + 6z - 6 = 0$
    b) $P = (-2, 6, -6)$, $\pi: -4x + y + 3z + 4 = 0$

CAPÍTULO 15 ESTUDO DO PLANO

§3. Vetor Normal a um Plano (pág. 160)

1. a) $(1, 0, 0)$ b) $(1, 2, 1)$ c) $(1, -2, 4)$

2. $x - y + 2z - 4 = 0$

3. $x - 2z = 0$

4. $x + 2y - z = 0$

5. $\vec{v} = (-3, 0, -5) + (0, 4, 0)$

6. $X = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, -1)$

7. $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

9. $3x + 4y - z - 10 = 0$ é uma equação geral do plano.

11. $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = \lambda \end{cases}$

CAPÍTULO 15 ESTUDO DO PLANO

§4. Feixe de Planos (pág. 166)

1. $x + z - 2 = 0$ 4. $2y + z = 0$ 5. Não existe

CAPÍTULO 16 POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

§1. Reta e Reta (pág. 170)

1. a) paralelas distintas
   b) concorrentes em $P = (1, -1, 0)$
   c) reversas
   d) $r = s$
   e) concorrentes em $P = (-2, 6, -6)$
   f) concorrentes em $P = (-2, 2, -7)$
   g) reversas
   h) reversas

2. a) $m = 1$ b) $m = 1$ c) m qualquer
   d) **não existem** e) qualquer $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \neq 0$ e $m \neq 1$

3. a) $3x - 4y - 10z + 3 = 0$ b) $x - z - 1 = 0$
   e) $-4x + y + 3z + 4 = 0$ f) $-17x + 7y + 6z - 6 = 0$

4. c) $4x - 2y - z + 3 = 0$ g) $7x - 11y + 3z + 7 = 0$
   h) $5x - 4y + z + 22 = 0$

5. $m = 2/3$, concorrentes no ponto $P = (-9, -5, -13)$

6. $\beta = 2$, α qualquer; $(\alpha + 1)x - 3y + (5 - \alpha)z + (2\alpha - 1) = 0$

CAPÍTULO 16 POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

§2. Reta e Plano (pág. 175)

1. a) r fura π no ponto $P = (1, 0, -1)$
   b) $r \,//\, \pi$
   c) $r \subset \pi$
   d) $r \,//\, \pi$
   e) r fura π no ponto $P = (-1/9, -4/9, -1/9)$
   f) $r \,//\, \pi$

2. $m = 2$
3. $m = 1$, $n = 7$
4. Qualquer $m \neq 0$ é solução
5. 1) $P = (11/17, 13/17, 15/17)$
   3) $P = (5, -3, 4)$

CAPÍTULO 16 POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

§3. Plano e Plano (Pág. 181)

1. a) $\pi_1 = \pi_2$ b) $\pi_1 // \pi_2,\ \pi_1 \neq \pi_2$ c) $\pi_1 \pitchfork \pi_2$
2. a) $\nexists$ m (para m = −5/2, tem-se $\pi_1 = \pi_2$) b) m = −5/2
3. • Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ é LI ou $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então $\pi_1 \pitchfork \pi_2$
   • Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ é LD, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD e $A \in \pi_2$ então $\pi_1 = \pi_2$
   • Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ é LD, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD e $A \notin \pi_2$, então $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$

CAPÍTULO 16 POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

§4. Miscelânea de Exercícios (pág. 186)

1) a) $X = (1, 1, 1) + \lambda(-1, 1, 1)$
   b) Impossível (r é paralela ao plano (P, s)).
   c) P ∈ r; logo, existem infinitas soluções, a saber, todas as retas que passam por P e por um ponto de s.
   d) Impossível (s é paralela ao plano (P, r))
   e) $X = (1, 0, 3) + \lambda(6, -2, 7)$. Observe que as retas r e s são concorrentes.

2. a) Impossível, pois $\overrightarrow{MN}$ é gerado por $\vec{r}$ e $\vec{s}$ (diretores de r e s) e portanto os planos π_1 e π_2 são paralelos.
   b) $X = (0, 2/5, -1/5) + \lambda(1, 0, 1)$
   c) $X = (6, 10, 0) + \lambda(3, 2, -1)$. Observe que r e s são concorrentes.

3. a) $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, -3, -1)$
   b) Qualquer reta que passa por P e é concorrente com r é solução, pois o plano (P, r) é paralelo a π.
   c) Não existe; r é paralela a π mas o plano (P, r) não é paralelo a π.

4. $X = (1, 1, 0) + \lambda(-2, -1, 1)$
5. $X = (1, 0, 2) + \lambda(0, -1, 2)$
6. $x - 2y + 1 = 0$
7. $x + y + z - 8 = 0$
8. Duas soluções: $h_1 : X = (1, 1, 3) + \lambda(1, 3, -4)$
   $h_2 : X = (-4, -3, 1) + \lambda(4, 1, -5)$
9. Sim, pois r π. Não, pois $Ox \pitchfork \pi$.
10. Volume: 1/6.
11. Volume: 125/9.
12. Não existe o tetraedro, pois $s // \pi$.
13. $B = (15/22, 20/22, 25/22)$ $C = (7/22, 2/22, -3/22)$
14. a) área $\sqrt{3}/2$ b) $\nexists$ A, pois $s // \pi$ c) $\nexists$ A, pois $s \subset \pi$

15. A projeção de P é $P' = (-1, -4, -2)$.

16. Sim, infinitas, pois o plano (P, r) é paralelo a π.

17. $A = (1, 1, -1)$, volume $= 65/3$.

18. a) $t : X = (10, 1, 1) + \lambda(9, 2, 10)$ ou $t : X = (1, -1, -9) + \lambda(1, -2, 10)$; r e s são concorrentes e P pertence ao plano por elas determinado.

b) $\nexists$ t; r e s são reversas, r é transversal ao plano (P, s) e s é transversal ao plano (P, r). Logo, existe uma única reta que passa por P e concorre com r e s; essa reta não satisfaz à condição do exercício.

19. a) l.g.: $2x + 2y - 2z - 1 = 0$. Trata-se de um plano paralelo às retas r e s (que são reversas), situado "a meio caminho entre elas".

b) l.g.: $X = (1/2, -1, 0) + \alpha(1, 2, 3)$. Trata-se de uma reta paralela às retas r e s (que são paralelas e distintas), coplanar com r e s, situada "a meio caminho entre elas".

c) l.g.: $x - 3y + z - 1 = 0$. Trata-se do plano determinado por r e s (que são concorrentes). Compare com o Exercício 19(a).

20. a) l.g.: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1/4 \\ z = 1/4 \end{cases}$ (o l.g. só contém um ponto)

b) O l.g. é ϕ; o vetor $\overrightarrow{AB}$ não é paralelo ao plano das retas paralelas r e s (se fosse, a resposta seria a mesma do Exercício 19b, salvo se $\overrightarrow{AB} = \lambda(1, 2, 3)$; por quê?).

c) l.g.: $X = (0, 0, 1) + \alpha(4, 1, -1)$. Trata-se de uma reta que passa pelo ponto comum a r e s $(P = (0, 0, 1))$ e está contida no plano determinado por r e s (o vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo a esse plano). Compare com o Exercício 19c.

21. a) O l.g. é E^3. Uma "equação" para E^3 é, por exemplo, $0x + 0y + 0z = 0$.

b) l.g.: $x - y + 3z - 1/2 = 0$. Trata-se de um plano paralelo a π_1 e a π_2 (que são paralelos!), situado "a meio caminho entre eles".

22. a) l.g.: $3x - 7y + 7z - 10 = 0$

b) l.g.: $x - y + 3z - 1/2 = 0$. É o mesmo plano do Exercício 21b. Por quê?

23. a) l.g.: $x - 2y - z = 0$. É um plano paralelo a π, a "meio caminho entre π e r" (note que $r \mathbin{//} \pi$).

b) O l.g. é E^3.

c) l.g.: $x - 2y - z = 0$ (é o plano π; note que $r \subset \pi$).

24. a) l.g.: $X = (-1/3, 1/3, -1) + \lambda (2, -1, 4)$. É uma reta paralela a r, interseção do l.g. do Exercício 23a com o plano que contém r e é paralelo a $\overrightarrow{AB}$.

b) l.g.: $X = (0, 0, 0) + \lambda (4, 1, 1)$. É uma reta que passa pelo ponto onde r fura π. Observe que os segmentos que se apoiam em r e π e são paralelos a AB são os mesmos segmentos que são paralelos a AB e se apoiam em r e s, sendo s a reta interseção do plano π com o plano que contém r e é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ (UFA!). Compare com o Exercício 20c.

c) l.g.: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1)$; é a própria reta r. Não estranhe: como $r \subset \pi$ e $\overrightarrow{AB}$ não é paralelo a π, um segmento apoiado em r e π só será paralelo a AB se suas extremidades coincidirem!

25. $X = (11/5, 19/5, -1/5) + \lambda(2, 1, 0)$ e
$X = (-1/5, 31/5, 11/5) + \mu(2, 1, 0)$

26. $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (3, 3, 3)$,
$h: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$

27. Duas soluções:

i) π: $2x - y + z - 1 = 0$, vértices: $A = (1/2, 0, 0)$,
$B = (0, -1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (0, 0, 0)$

ii) π: $-x + 2y + z - 1 = 0$, vértices: $A = (-1, 0, 0)$,
$B = (0, 1/2, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

28. Duas soluções:

i) π: $6x + 3y + 2z + 3 = 0$
ii) π: $6x + 3y + 2z - 3 = 0$

CAPÍTULO 17 PERPENDICULARISMO E ORTOGONALIDADE

§1. **Reta e Reta** (pág. 196)

1. a) perpendiculares
b) não são ortogonais
c) perpendiculares
d) perpendiculares
e) não são ortogonais



2. a) $\begin{cases} x = 2 - 41\lambda \\ y = 6 - 52\lambda \\ z = 1 + 31\lambda \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$

3. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$

4. $X = (-\frac{2}{9}, \frac{11}{9}, \frac{20}{9}) + \lambda(4, 5, -1)$

CAPÍTULO 17 PERPENDICULARISMO E ORTOGONALIDADE

§2. **Reta e Plano** (pág. 201)

1. a) não b) sim c) sim d) não e) sim

2. a) $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 7 + \lambda \end{cases}$

3. a) $x - y + z + 2 = 0$

   b) $x + y + z - 1 = 0$

   c) $x - y + z = 0$

4. a) $(3, 2, 4)$ b) $(1, -1, 2)$

5. a) $(2, -1, -2)$ b) $(-\frac{1}{11}, \frac{7}{11}, \frac{29}{11})$

   c) $(\frac{-8}{19}, \frac{18}{19}, \frac{-7}{19})$

6. a) $(\frac{58}{25}, \frac{56}{25}, 1)$

   b) $X = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0) + \lambda(8, 10, 1)$

   c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

7. $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases}$

8. $x + y - z - 1 = 0$

9. $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

10. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = z$

11. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 3, \frac{\sqrt{2}}{2})$; volume $\frac{2}{3}$.

CAPÍTULO 17 PERPENDICULARISMO E ORTOGONALIDADE

§3. Plano e Plano (pág. 205)

1. a) não b) sim c) sim d) sim

2. $x - 2y - z = 0$

3. $x + y - z - 1 = 0$

4. $(1, 1, 0)$, $(1, 3, \sqrt{2})$, $(2, 2, \sqrt{2})$, $(0, 2, 0)$ $(2, 2, 0)$
$(1, 1, \sqrt{2})$ $(1, 3, 0)$ $(0, 2, \sqrt{2})$

5. $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$

CAPÍTULO 18 ÂNGULOS (pág. 207)

1. a) $\frac{20}{\text{[illegible]}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 0

2. a) $\frac{\pi}{4}$ b) arc sen $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) arc sen $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ d) arc sen $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

3. a) $\operatorname{arc\,cos} \frac{2}{\sqrt{66}}$ b) $\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{3}}$ c) [illegible]

4. São quatro retas:

$X = (5/2, 2, -3/2) + \lambda (1, 1, 1)$, $X = (-3, -5/3, 4) + \lambda (1, 1, -1)$

$X = (2/3, 2, 1/3) + \lambda (-1, 1, 1)$ e $X = (1/7, 3/7, 6/7) + \lambda (1, -1, 1)$

5. São quatro retas:

$X = (0, 2, 1) + \lambda (-1, 1, 1)$, $X = (0, 2, 1) + \lambda (-7, 1, 1)$

$X = (0, 2, 1) + \lambda (3, 1, -1)$, $X = (0, 2, 1) + \lambda (3, -1, 1)$

6. $\frac{x-1}{\pm\sqrt{2}} = y + 2 = \frac{z-3}{\pm 1}$ (são quatro retas)

7. $X = (1, 1, 1) + \lambda (0, 1, 1)$, $X = (1, 1, 1) + \lambda (-4, 1, 1)$

8. $(-2 + \sqrt{3}, 1, 1 - \sqrt{3})$, $(-2 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3})$

9. $\operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. $2x - 3y + z - 5 = 0$ ou $3x - y - 2z - 4 = 0$

11. $x + y - 3z - 1 = 0$ ou $x - y - 3z + 3 = 0$

13. $6x + 3y + 2z - 3 = 0$

14. $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (1, 0, 1)$.

CAPÍTULO 19 DISTÂNCIAS (pág. 231)

1. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{173}$

2. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{34/7}$

c) $\sqrt{270/29}$ d) $3\sqrt{10/7}$

3. a) $\sqrt{\dfrac{41}{21}}$ b) $\dfrac{5\sqrt{30}}{6}$

4. a) 2 b) 7/2 c) 94/13 d) 1

5. a) 13/2 b) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

6. a) $\dfrac{4}{\sqrt{46}}$ b) 13 c) $\dfrac{7}{\sqrt{26}}$

7. (2, 0, 2), (0, 2, −2)

8. Não existe solução, pois r é paralela ao plano mediador de AB.

9. a) (1, −1, −1) b) $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ c) $\left(\dfrac{4}{3}, 1, \dfrac{1}{3}\right)$

10. a) $\left(\dfrac{23}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$ b) $\left(\dfrac{-13}{4}, -\dfrac{9}{4}, \dfrac{-7}{4}\right)$ c) (1, 1, 1)

11. (2, 0, 2) e (0, 2, −2)

12. (1, 0, 0) e $\left(\dfrac{19}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{16}{3}\right)$

13. $X = (-1, 3, -3) + \lambda(1, 0, 2)$

$X = \left(-1, \dfrac{17}{9}, \dfrac{-7}{9}\right) + \lambda(1, 0, 2)$

14. $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (2, 0, 0)

15. O l.g. é a reunião das retas

$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = -2 + \sqrt{6} \end{cases}$ e $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = -2 - \sqrt{6} \end{cases}$

16. O l.g. é a reunião dos dois planos

$\pi_1 : y = z$ e $\pi_2 : 2x - y - z = 2$

17. O l.g. é a reta

$$r: \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 16x + 6y + 6z = 41 \end{cases}$$

18. $(-3, 5, -8)$ e $(9, -7, 16)$

19. $(3, 1, 2)$ e $(-1, -1, -2)$

20. $x + z - 2 = 0$

21. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

22. $y - 1 = 0$, $6x - 2y - 3z - 7 = 0$

24. $z = 1$ ou $x + y + 2z - 4 = 0$

25. $X = (1, 0, 3) + \lambda(1, 1, 0)$; $X = (4, 0, -3) + \lambda(7, 4, 0)$

26. O l.g. é a reunião das quatro retas

$$r_1: \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$r_3: \begin{cases} x - z = 1 \\ 2z = 1 \end{cases} \qquad r_4: \begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

27. 4/3

28. Trata-se de um par de planos, de equações gerais $4x + 3y - 2z = 0$ e $5y - 6z + 12 = 0$, que se interceptam na reta $\pi_1 \cap \pi_2$.

29. $2x - y + 2z - 15 = 0$ e $2x - y + 2z - 3 = 0$

30. Volume $= 2\sqrt{\sqrt{6} - 2}$

31. $7x + 19y - 10z + 5 = 0$ e $17x - y + 10z - 5 = 0$

32. $3x + 3y + 1 = 0$

33. $x + 3y - 6z = 0$

34. São quatro respostas:

$X = (-2, 2, 1) + \lambda(1, -1, 0)$, $X = (0, 0, -1) + \lambda(1, -1, 0)$
$X = (0, 0, \sqrt{17}) + \lambda(-1, 1, 4)$, $X = (0, 0, -\sqrt{17}) + \lambda(-1, 1, 4)$

35. $\dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Pensou que fosse $|d_1 - d_2|$, hein?!

36. $6x + 3y + 2z - 3 = 0$

CAPÍTULO 20 MUDANÇA DE COORDENADAS

§1. **Mudanças de Coordenadas em E^3** (pág. 237)

1. r: $\begin{bmatrix} u = -1 \\ v = \lambda \\ w = \lambda \end{bmatrix}_{\Sigma_2}$

2. r: $\begin{bmatrix} u = -1 \\ v = 1 \\ w = -1 + \lambda \end{bmatrix}_{\Sigma_2}$

3. $2u - v - w + 2 = 0$
$u - v + 2 = 0$

CAPÍTULO 20 MUDANÇAS DE COORDENADAS

§2. **Mudanças de Coordenadas em E^2** (pág. 242)

1. $\theta = \pi/3 + 2n\pi$, n inteiro

2. $O' = (-1, 1)_{\Sigma_1}$

3. $\theta = \text{arc sen}\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2n\pi$, n inteiro

CAPÍTULO 20 MUDANÇA DE COORDENADAS

§3. Aplicação das Translações e Rotações de E^2 ao estudo da Equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (pág. 256)

3. a) $4u^2 + v^2 - 16 = 0$
   b) $4u^2 - 3v^2 - 7 = 0$
   c) $4u^2 - 5v^2 + 100 = 0$
   d) $v^2 - 4u = 0$
   e) $u^2 - 5v = 0$
   f) $u^2 + 2v^2 - 7 = 0$
   g) $w^2 - 4t = 0$
   h) $t^2 + 2w^2 - 2 = 0$
   i) $t^2 + 2w^2 - 6 = 0$
   j) $13t^2 - 4w^2 - 81 = 0$
   l) $2t^2 - 3w^2 - 24 = 0$
   m) $11t^2 + 6w^2 - 66 = 0$
   n) $2t^2 - 11w^2 - 22 = 0$
   o) $4t^2 - w^2 = 0$
   p) $t^2 - 1 = 0$
   q) $w^2 = 8t$

CAPÍTULO 21. CÔNICAS

§1. Elipse. Hipérbole, Parábola (Forma Reduzida) (pág. 268)

1. a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$
   b) $\dfrac{x^2}{253} + \dfrac{y^2}{289} = 1$
   c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
   d) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$
   e) $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
   f) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

g) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2. a) $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 4)$, $(\pm 3, 0)$, $\frac{3}{5}$

b) $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $(0, \pm 5\sqrt{2})$, $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 5)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3})$, $(\pm 1, 0)$, $\frac{1}{2}$

3. a) $\frac{x^2}{\frac{35}{3}} + \frac{y^2}{\frac{35}{2}} = 1$

b) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{\frac{128}{7}} = 1$

4. $(\pm 2, 2)$, $(\pm 2, -2)$, 16

5. a) $4x^2 + 3y^2 + 24x - 24y + 36 = 0$

b) $8x^2 - 2xy + 8y^2 - 63 = 0$

c) $35x^2 - 2xy + 35y^2 - 34x - 34y - 289 = 0$

6. a) $(\pm 12, 0)$, $(\pm 13, 0)$, $13/12$, $12y = \pm 5x$

b) $(\pm 5, 0)$ $(\pm\sqrt{41}, 0)$, $\sqrt{41}/5$, $5y = \pm 4x$

c) $(0, \pm 4)$, $(0, \pm 4\sqrt{2})$, $\sqrt{2}$, $y = \pm x$

d) $(0, \pm 2)$, $(0, \pm\sqrt{13})$, $\sqrt{13}/2$, $3y = \pm 2x$

e) $(\pm 1, 0)$, $(\pm 2, 0)$, 2, $y = \pm\sqrt{3}\,x$

7. a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

b) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1$

c) $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

e) $\dfrac{y^2}{56} - \dfrac{x^2}{56} = 1$

f) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

8. a) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y + 161 = 0$

b) $3x^2 + 12xy + 8y^2 - 18x - 28y + 11 = 0$

9. a) $(4, 0)$, $(0, 0)$, $x + 4 = 0$

b) $(-7, 0)$, $(0, 0)$, $x - 7 = 0$

c) $(0, -10)$, $(0, 0)$, $y = 10$

d) $(\dfrac{3}{5}, 0)$, $(0, 0)$, $5x + 3 = 0$

e) $(0, 7/8)$, $(0, 0)$, $8y + 7 = 0$

f) $(0, \dfrac{15}{28})$, $(0, 0)$, $28y + 15 = 0$

10. a) $y^2 = 32x$

b) $x^2 = -8y$

c) $y^2 = 20x$

d) $x^2 = 2y$

e) $y^2 = -16x$

11. a) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

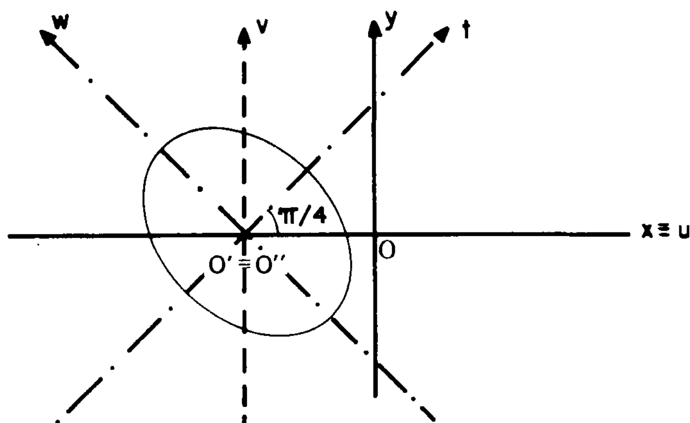
b) $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

c) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 52x + 26y + 91 = 0$

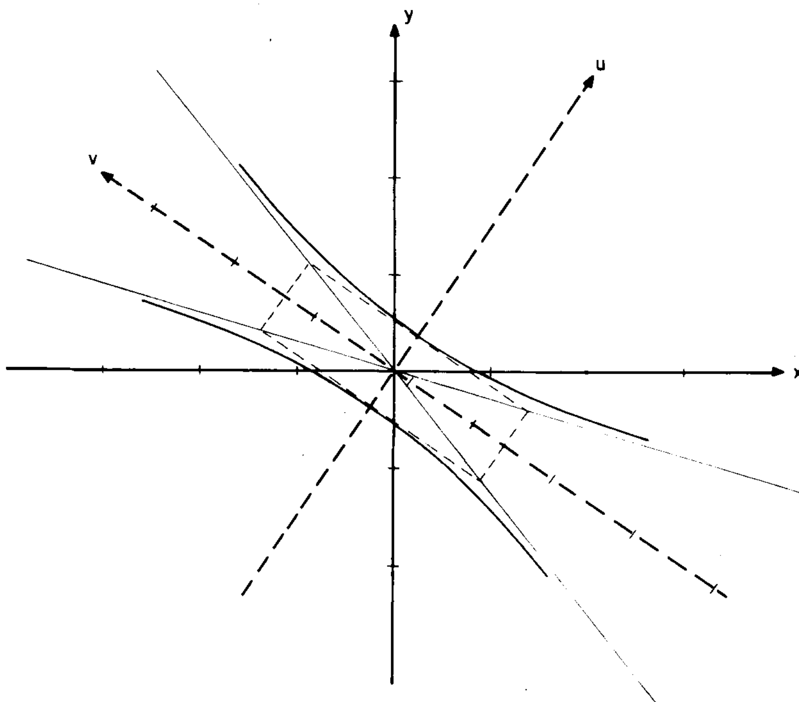
CAPÍTULO 21 CÔNICAS

§2. Cônicas (Caso Geral) (pág. 271)

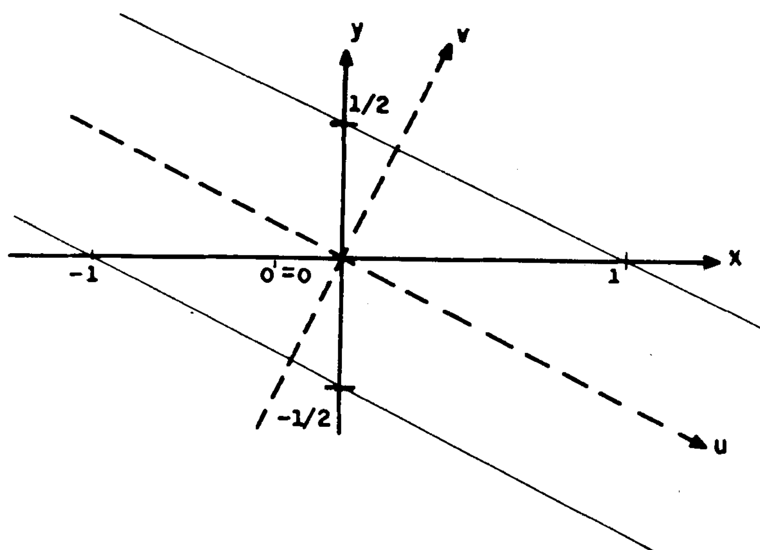
1. a) $t^2 + \frac{1}{2} w^2 = 1; \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$.



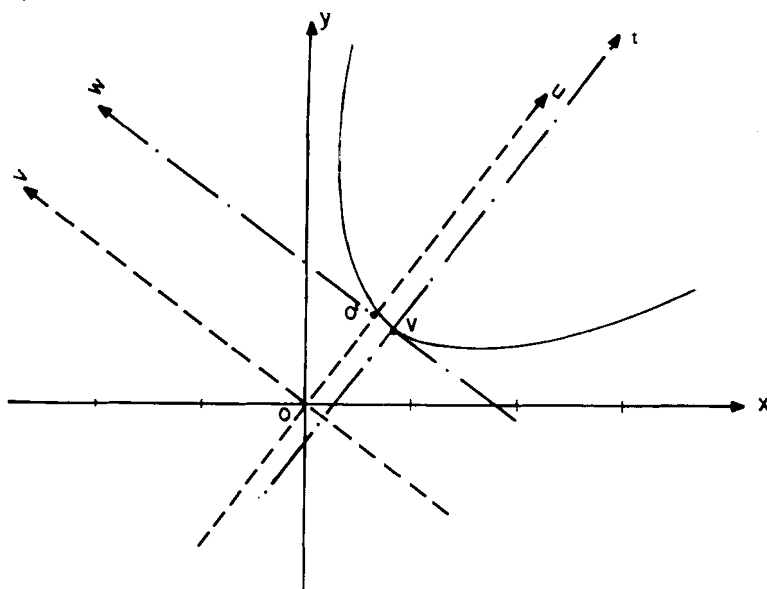
b) $\dfrac{u^2}{\frac{2}{11}} - \dfrac{v^2}{2} = 1; \qquad \theta = \dfrac{\pi}{3}$.



c) $v = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\theta = \text{arc tg } (-\frac{1}{2})$.

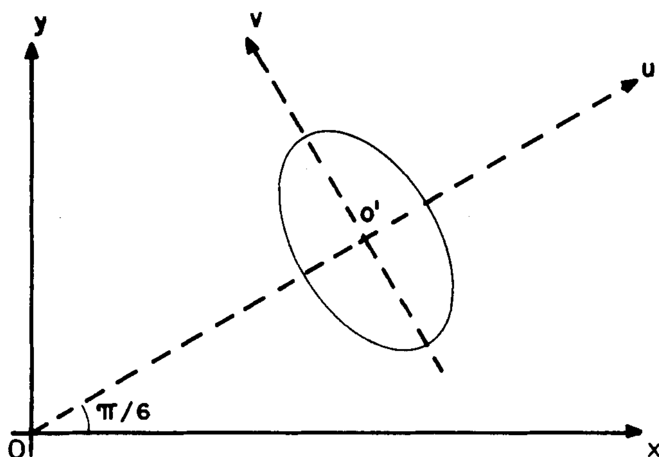


d) $w^2 = 2t$; $\theta = \text{arc tg } \frac{4}{3}$.

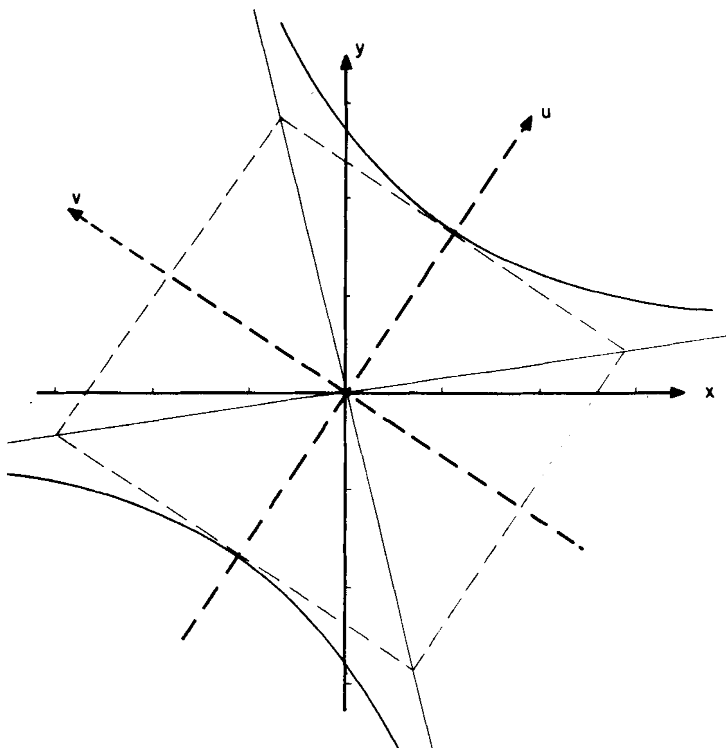


$V = (\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$, em relação ao sistema Ouv.

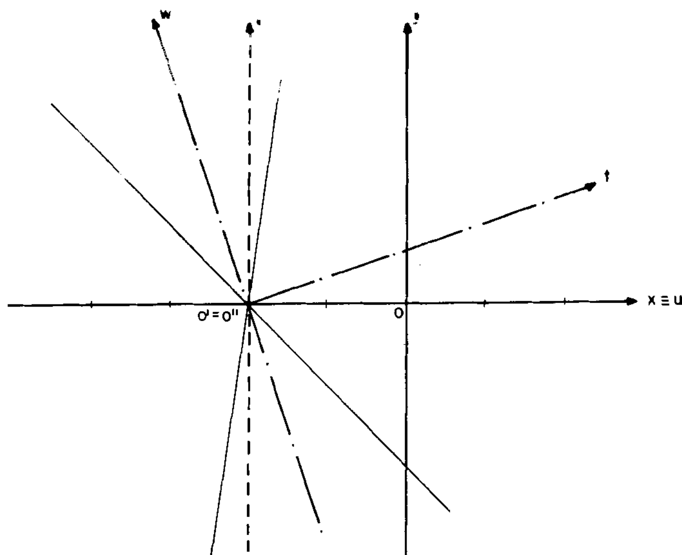
e) $\frac{u^2}{1/2} + v^2 = 1$; $\theta = \frac{\pi}{6}$.



f) $\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{5} = 1$; $\theta = \text{arc tg } \frac{3}{2}$.



g) $w = \pm 2t$: $\theta = \text{arc tg } \dfrac{1}{3}$



2. a) hipérbole: $\dfrac{u^2}{9} - \dfrac{v^2}{4} = 1$: $\text{tg } \theta = -2$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) elipse: $\dfrac{u^2}{4} + v^2 = 1$: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ rd

c) hipérbole: $\dfrac{t^2}{6} - \dfrac{w^2}{46} = 1$: $\text{tg } \theta = 5$ (1º quadrante)

d) parábola: $w^2 = 8t$ $\text{tg } \theta = 2$ (1º quadrante)

e) parábola: $w^2 = 8t$; $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rd

f) hipérbole: $t^2 - \dfrac{w^2}{9} = 1$; $\text{tg } \theta = 3$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

g) ponto (origem), $20u^2 + 5v^2 = 0$, $\text{tg } \theta = -1/2$ (2º quadrante)

h) conjunto vazio; $\text{tg } \theta = -3$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $t^2 + 2w^2 + 1 = 0$

3. a) reunião de duas retas concorrentes
   b) hipérbole
   c) ponto
   d) elipse
   e) reunião de duas retas paralelas
   f) parábola
   g) reta
   h) circunferência

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§1. Superfície Esférica

1.1 Equação reduzida e equação geral (pág. 292)

1. a) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2 = 4$
   b) $x^2+y^2+z^2 = 1$
   c) $(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2+(z+3)^2 = 2$
   d) $(x-18)^2+(y+17)^2+(z+1)^2 = 2\,500$
   e) $x^2+(y-1)^2+z^2 = 16$

2. a) $C=(2,-6,0)$, $r = 5$
   b) $C=(2,-3,-1)$, $r = 4$
   c) não
   d) $C=(1,-1,0)$, $r=\sqrt{2}$
   e) não
   f) não
   g) $C=(1,1,1)$, $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   h) não
   i) não

3. $x^2+y^2+z^2 = 1$

4. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 1$

5. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 6$

6. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

7. $x^2 + y^2 + z^2 + 14x + 6y + 4z - 136 = 0$

8. $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+12}{2}$

9. 7

13. a) $\left(\frac{40}{3}, 0, 0\right), \frac{20}{3}$

 b) $(-6, 6, -6), 6\sqrt{3}$

 c) $(0, 0, 0), \sqrt{15}$

 d) $(-1, 3, -1), \sqrt{20}$

 e) $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \frac{1}{2}$

15. A é exterior, B é interior.

16. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$

17. Extremidades do diâmetro: $(0, 0, 0)$ e $(-2, 2, 0)$.

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§1. Superfície Esférica

1.2 Plano tangente (pág. 302)

1. a) $4x - y + z + 2 = 0$

 b) $x - \sqrt{95}\, y + 2z + 95 = 0$

2. $2x + y - z - 4 \pm \sqrt{6} = 0$

3. $x - 1 = 0$ e $x - 2y - 2z - 3 = 0$

4. $x - y + 3z - 4 = 0$ e $3x - y - z - 14 = 0$

7. $2x + y + z + 4 = 0$ e $2x + y + z - 8 = 0$

8. a) Não existe, pois a reta t é secante a S $(d(C, t) < r)$.
b) $x - y - z - 2 = 0$ (há um só plano, pois t é tangente a S).

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z + 3 = 0$

10. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$

11. $(x+2)^2 + y^2 + (z+11)^2 = \frac{144}{5}$ · $(x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{16}{5}$

12. $(x - \sqrt{3}/3)^2 + (y - \sqrt{3}/3)^2 + (z - \frac{6+\sqrt{3}}{3})^2 = (\frac{\sqrt{3}+3}{3})^2$

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 1 = 0$

14. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 70 = 0$

15. $x^2 + y^2 + z^2 + (3 \pm \sqrt{11})x - 4y + 2z + 5 = 0$

16. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$

17. 3 ou 1

18. $a = 6$ e $T = (2, 2, 2)$, ou $a = -6$ e $T = (-2, -2, -2)$.

19. $r^2(a^2 + b^2 + c^2) = d^2$

20. Máximo: 6; Mínimo: -6.

21. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 6y + 8z + 36 = 0$

22. $x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = \frac{173}{7}$

23. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 9 = 0$

24. $x = 1$, $2x + 6y - 3z - 11 = 0$

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§1. Superfície Esférica

1.3 Plano secante. Equações de uma circunferência (pág. 306)

1. $(-1, 2, 3)$ e 8

2. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

5. O l.g. é a circunferência de equações

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 8 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

com centro $P = (2, 0, -2)$ e raio $\sqrt{6}$.

6. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 65 \\ 18x - 22y + 5z = 30 \end{cases}$

7. $x - 2y - z \pm 3 = 0$

8. $(1,0,0)$, $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$, $(0,0,1)$ e $(0,1,0)$.

9. Secantes. Centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$

10. $-\frac{9}{4}$ ou $-\frac{9}{16}$

11. $(x - \frac{5}{2})^2 + (y-5)^2 + (z+5)^2 = \frac{81}{4}$

$(x - \frac{3}{2})^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \frac{9}{4}$

$(x - \frac{3}{2})^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \frac{225}{4}$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = \frac{81}{4}$$

12. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 4$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4/3)^2 = 16/9$

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 18 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 3 = 0$

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§3. Superfície Cilíndrica (pág. 313)

1. $(Y - Z)^2 + (2Y - X - Z)^2 = Y - X$

2. $(X - 2Z)^2 - (X - 2Z)(Y - Z) + 1 = 0$

3. $(X - Z)(Y - Z) = 2Z - X - Y$

4. Veja a resposta anterior.

5. $f(X - mZ, \quad Y - nZ) = 0$

6. $(3X - 2Y + Z - 9)^2 - 14(X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X + 4Y - 4Z + 6) = 0$

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§4. Superfície Cônica (pág. 319)

1. $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$

2. $X^2 + Y^2 + X(Z - 1) = 0$

3. $XZ - Y^2 = 0$

4. $X^2 - 7Y^2 - 8Z^2 + 6XY = 0$

5. $2(X + 2Y - Z - 2)^2 - 3[(X - 1)^2 + (Y - 1)^2 + (Z - 1)^2] = 0$

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§5. Superfície de Rotação (pág. 323)

1. $(X + Y + Z)^2 - 2(X^2 + Y^2 + Z^2) + 1 = 0$

2. $(X+Y+Z)^2 - 2(X^2+Y^2+Z^2) = 0$

3. a) $9(X^2+Y^2) = (1-3Z^2)^2$

b) $X^2+Y^2+Z^2 = 1$

c) $4(X^2+Y^2) = (X^2+Y^2+(Z-2)^2)^2$ (a superfície é um toro).

4. a) $3(Y^2+Z^2)+3X = 1$

b) $X^2+Y^2+Z^2 = 1$

c) $16(Y^2+Z^2) = [(X-1)^2+Y^2+Z^2+3]^2$

5. $Z^2+X^2 = (Y^2-1)^2$

6. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{a^2} = 1$ e $\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{a^2} = 1$

7. $X^2+Y^2-Z^2-Z = 0$

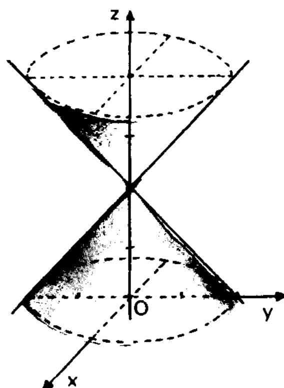
8. $4Y^2 = Z^2(1-X^2)$

CAPÍTULO 22 SUPERFÍCIES

§6. **Quádricas (Forma Reduzida)** (pág. 329)

8. $X = -\frac{Y^2}{8} - \frac{Z^2}{8}$: parabolóide elíptico; é uma superfície de rotação.

9. $Y = \frac{X^2}{2} - \frac{Z^2}{2}$: parabolóide hiperbólico.



10. É uma superfície cônica de vértice $V = (0,0,2)$, que tem por diretriz a circunferência

$$C: \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Veja o Exercício Resolvido nº 3, do § 1, Capítulo 18.

11. $x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 14y - 6z + 26 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 10y - 10z + 10 = 0.$

Se você não souber o que é gradiente de uma função, resolva o exercício com este dado adicional: o vetor $\vec{n} = (2, 6, -1)$ é normal ao parabolóide dado no ponto $T = (1, 1, 4)$.

ÍNDICE ANALÍTICO